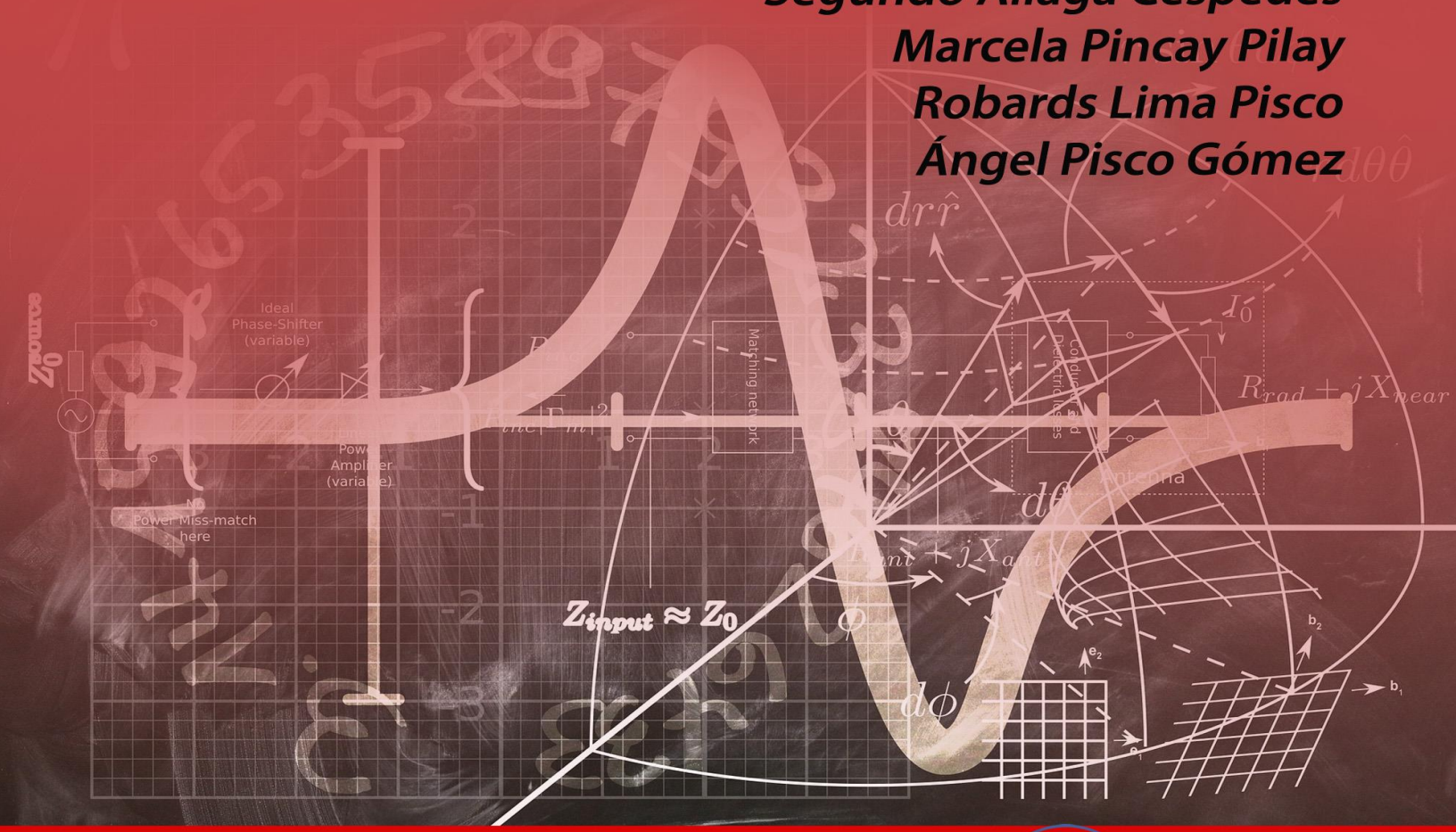
ELEMENTOS DE MATEMÁTICA BÁSICA PARA CARRERAS UNIVERSITARIAS

TOMO I

Alberto Rodríguez Rodríguez
Leonor Moreno Suárez
Segundo Aliaga Céspedes
Marcela Pincay Pilay
Robards Lima Pisco
Ángel Pisco Gómez



Ciencias y Letras

3ciencias

ELEMENTOS DE MATEMÁTICA BÁSICA PARA CARRERAS UNIVERSITARIAS

TOMO I

Alberto Rodríguez Rodríguez

Leonor Moreno Suárez

Segundo Aliaga Céspedes

Marcela Pincay Pilay

Robards Lima Pisco

Ángel Pisco Gómez

Editorial Área de Innovación y Desarrollo,S.L.

Quedan todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, distribuida, comunicada públicamente o utilizada, total o parcialmente, sin previa autorización.

© del texto: **autores**

© del texto: Área de Innovación y Desarrollo, S.L.

C/ Els Alzamora, 17 - 03802 - ALCOY (ALICANTE) info@3ciencias.com

Primera edición: **septiembre 2017**

ISBN: **978-84-947208-7-1**

DOI: **http://dx.doi.org/10.17993/CcyLl.2017.11**

Índice

PRÓLOGO 13
INTRODUCCIÓN 15
CAPÍTULO 1. DOMINIOS NUMÉRICOS 17
1.1 Teoría de conjuntos 17
1.1.1 Introducción 17
1.1.2 Elementos y Conjuntos 17
1.1.3 Diagramas de Venn 18
1.1.4 Operaciones entre conjuntos 20
1.2. Dominios numéricos (N, Z, Q+, Q y R) 23
1.2.1. Repaso y profundización sobre los dominios numéricos 23
1.3. Potenciación 29
1.3.1 Resolución de problemas donde se combinen las diferentes operaciones, el tanto por ciento y tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud 34
1.4. Radicales 40
1.4.1. Propiedades de los radicales 41
1.4.2. Radicales semejantes. Adición y sustracción de radicales 46
1.4.3. Multiplicación y división de radicales 47
1.5 Logaritmos 50
1.5.1. Definición de logaritmo 50
1.5.2. Propiedades de los logaritmos 50
1.6 Estadística Descriptiva 51
1.6.1 Tipos de variables 52
Variables cualitativas 53
Variables cuantitativas 53
1.6.2. Escalas de medición de la variable 54
1.6.3. Frecuencias 55
1.6.4. Lectura e interpretación de informaciones 55
1.6.5. Medidas de tendencia central 58
CAPÍTULO 2. TRABAJO ALGEBRAICO 63
2.1 Operaciones con polinomios 63

Determinar mínimo común múltiplo (m.c.m) 64
Determinar máximo común divisor (m.c.d) 64
2.2 Fracciones algebraicas 67
CAPÍTULO 3. ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES 71
3.1 Ecuaciones e inecuaciones 71
Resolver ecuaciones lineales 71
Resolver ecuaciones cuadráticas 71
Resolver ecuaciones fraccionarias 71
Resolver inecuaciones lineales 73
Resolver inecuaciones cuadráticas 73
Resolver inecuaciones fraccionarias 74
Ecuaciones con radicales 77
Ecuaciones exponenciales 77
Inecuaciones exponenciales 78
3.2 Sistemas de ecuaciones 85
Resolver sistemas de ecuaciones lineales. (2x2) 87
Resolver sistemas de ecuaciones lineales. (3x3) 87
Resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas. 88
Resolver problemas 90
CAPÍTULO 4. FUNCIONES 95
4.1 Concepto función 95
Propiedades de las funciones 96
Funciones numéricas 105
Funciones fraccionarias 105
Funciones con radicales 106
Función exponencial 106
Función logarítmica: 107
4.2 Representación de situaciones a través de funciones 108
CAPÍTULO 5. GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA 113
5.1. Geometría plana 113
5.1.1. Base teórica de la geometría plana 113
5.1.2. Ángulos y Rectas 113

Ángulos determinados por dos rectas que se cortan 113
Ángulos entre paralelas (r || s y p secante) 113
Distancia de un punto a una recta: 114
5.1.3. Triángulos 114
En todo triángulo se cumple: 114
Rectas y puntos notables de un triángulo: 114
En todo triángulo se cumple: 115
Paralela media de un triángulo 115
Área: 116
Los triángulos según sus ángulos se clasifican en: 116
En todo triángulo rectángulo se cumple: 116
Razones trigonométricas: 117
Los triángulos según sus lados se clasifican en: 117
Semejanza y congruencia de triángulos 117
5.1.4 Cuadriláteros Convexos 118
5.1.5 Circunferencia y Círculo 120
5.1.5. Polígonos regulares 122
Igualdad y semejanza de triángulos 131
5.2 Trigonometría 132
Fórmulas de reducción y signos de cada función trigonométrica en cada cuadrante 134
Identidades trigonométricas 134
Demostrar identidades trigonométricas 135
Resolver ecuaciones trigonométricas 135
5.3 Geometría del espacio 147
5.3.1 Base teórica de la geometría del espacio 147
CUERPOS GEOMÉTRICOS 149
5.4 Geometría analítica de la recta 160
5.4.1 Base teórica fundamental de la geometría analítica 160
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS 169

Índice de Figuras

Figura 1 Representación gráfica de conjuntos. Diagramas de Venn. 18
Figura 2: Representación gráfica de la inclusión de conjuntos. 19
Figura 3: Representación gráfica de conjuntos de la unión. 20
Figura 4: A y B son conjuntos disjuntos 20
Figura 5: A está incluido en B, para este caso A ∪ B = B 20
Figura 6: Representación gráfica de la intersección de conjuntos. 21
Figura 7: A y B son conjuntos disjuntos, para este caso A ∩ B = ϕ 21
Figura 8: B está incluido en A, para este caso A ∩ B = B. 21
Figura 9: Representación gráfica de la diferencia de conjuntos. 21
Figura 10: A y B son conjuntos disjuntos, para este caso A \ B = A y B \ A = B. 22
Figura 11: A está incluido en B 22
Figura 12: Representación gráfica del complemento de conjuntos. 22
Figura 13: Intervalo abierto 25
Figura 14: Intervalo cerrado 26
Figura 15: Intervalo semiabierto o semicerrado 26
Figura 16: Intervalo de infinito 26
Figura 17: Grafica de todos los intervalos 27
Figura 18: Representación gráfico de barras 56
Figura 19: Representación gráfico de barras. 57
Figura 20: Representación gráfico de poligonal 57
Figura 21: Función real 95
Figura 22: Función real 96
Figura 23 : Monotonía 99
Figura 24: Funciones potenciales de exponente par 99
Figura 25: Funciones potenciales de exponente par 100
Figura 26: Funciones potenciales de exponente par 100
Figura 27: Funciones potenciales de exponente impar 101
Figura 28: Funciones potenciales de exponente impar negativo 101
Figura 29: Funciones potenciales de exponente par negativo 102
Figura 30: Dilatación 102
Figura 31: Contracción 103

Figura 32: Reflexión 103
Figura 33: Traslación 104
Figura 34: Paridad 105
Figura 35: Dominio 106
Figura 36: Dominio que tienden 107
Figura 37: Función logarítmica 107
Figura 38: Trigonométrica 132
Figura 39: El intervalo [-1,1] 133
Figura 40: El intervalo [-∞,+∞] 134

Índice de Tablas

Tabla 1: Propiedades de la potencia. 30
Tabla 2: Resumen de las propiedades de los radicales. 41
Tabla 3: Propiedades de los logaritmos 50
Tabla 4: De frecuencia 52

PRÓLOGO

La Matemática es de las ciencias más antiguas, nacidas en la aurora de la civilización humana bajo la influencia de las crecientes necesidades prácticas, sociales, científicas y tecnológicas.

El estudio lógico-histórico del desarrollo de la Matemática, define un armonioso sistema lógico-abstracto capaz de integrarse al complejo sistema de conocimientos científico-tecnológicos definido por otras ciencias (naturales, técnicas, sociales), que al emplear las teorías y los métodos de la Matemática, le plantean a ella nuevos problemas que estimulan su estudio, y cuyas soluciones contribuyen a su autodesarrollo.

La educación en nuestros días dirigida al logro de competencias, habilidades y la formación de valores, enfrenta a la comunidad científica (matemáticos, psicólogos, pedagogos y educadores matemáticos, entre otros) a complejas interrogantes: ¿Para quién enseñamos Matemática? ¿Qué Matemática enseñar?, ¿Cómo enseñar Matemática?¿Cómo aprender Matemática?

Al intentar dar respuesta a las interrogantes presentadas, aparece la dicotomía: contextualizar la Matemática sin que su carácter lógico-abstracto, de generalización y rigor se debilite.

A lo anterior se une la diversidad de los estudiantes que comienzan sus estudios universitarios, relativo a: procedencia social y características del nivel de la enseñanza precedente. Lo anterior define dos planos de dificultades: el de los alumnos, porque no es posible garantizarles ciertos parámetros comunes para su formación; y el de los docentes, porque dificulta el intercambio y la comunicación de experiencias pedagógicas.

La obra que se presenta tiene entre sus objetivos unificar el nivel en Matemática de los estudiantes que comienzan sus estudios universitarios, esperamos que el texto sirva de ayuda complementaria a todos aquellos estudiantes que se enfrentan a la resolución de problemas que requieran el uso de temas de nivel básico en Matemática, los que en dependencia de la especialidad se enfrentarán al estudio de disciplinas de Matemática Superior y de Matemática aplicada.

En la elaboración de este libro “Elementos de Matemática Básica para Carreras Universitarias”, se tuvieron en cuenta, entre otros, los aspectos siguientes:

La contextualización de los contenidos matemáticos en la práctica, al considerar los principios didácticos del proceso enseñanza-aprendizaje y las relaciones interdisciplinarias con materias a las cuales la Matemática sirve de base.

Se establece un lenguaje claro, preciso, cercano y ameno que sin perder el rigor científico, le permite al estudiante apropiarse de la base teórico-conceptual necesaria a través de ilustraciones y ejemplos demostrativos para enfrentarse a la resolución de variados ejercicios propuestos que garantizan la ejercitación y sistematización de los contenidos.

La obra también puede ser usada en temas seleccionados de profundización para los cursos del bachillerato.

Esperamos que esta primera edición contribuya a mejorar las experiencias del aprendizaje sistemático de las matemáticas a un nivel básico. Agradeceremos todos los aportes que puedan hacernos para, a su vez, mejorar este instrumento didáctico así como las próximas ediciones.

LOS AUTORES

INTRODUCCIÓN

Para poder lograr la mayor efectividad en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje con el uso de este libro, debe respetarse el orden de los temas propuestos y valorar la vinculación que existe entre ellos, en tanto, los profesores deben tener en cuenta el diagnóstico del grupo para concebir, en caso necesario, ejemplos de ejercicios y problemas que se correspondan a las necesidades y potencialidades de sus estudiantes.

Resuelta de vital importancia que los profesores adopten convenientemente en función del diagnóstico de los estudiantes, los sistemas de ejercicios, de forma que no queden por encima de sus posibilidades reales.

Deberán incluirse en las tareas ejercicios y problema que se correspondan con los tres niveles de desempeño: el reproductivo, de aplicación y el creativo, así como preguntas de verdadero o falso, completar y preguntas cerradas o de selección múltiple, es una exigencia actual, la utilización de preguntas abiertas o de desarrollo. Es necesario presentarles a los estudiantes diversas vías en la formulación de las preguntas.

A partir del análisis de los temas presentados y teniendo en cuenta la experiencia de los autores de este material en el trabajo con la enseñanza de la Matemática en diferentes niveles, le fue posible la elaboración del mismo, el cual puede servir como un valioso documento para estudiantes y docentes.

CAPÍTULO 1. DOMINIOS NUMÉRICOS

1.1 Teoría de conjuntos

Conjunto. Elemento. Inclusión de conjuntos. Operaciones con conjuntos (unión, intersección, diferencia y su caso particular, la complementación).

1.1.1 Introducción[1]

En el siglo XIX aparece una nueva etapa de desarrollo de la Matemática, en la que desempeñó un papel fundamental la creación de la teoría de conjuntos por George Cantor (1845-1918).

El surgimiento de la teoría de conjuntos está íntimamente ligado a los problemas de la fundamentación de la aritmética de los números reales y a la demostración de importantes teoremas del Análisis Matemático y de la teoría de las series trigonométricas.

Cantor desarrolló la teoría general de los números ordinales y cardinales transfinitos, la cual no pudo fundamentar en dos aspectos: la demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado y de que la hipótesis del continuo es correcta.

Las paradojas descubiertas en la teoría de conjuntos se sumaron a los problemas ya conocidos. El estudio de estas paradojas condujo al análisis más profundo de su estructura lógica y al planteamiento de la interrogante de si las leyes y reglas de la lógica usual, basadas en el principio del tercero excluido, eran universalmente aplicables.

Los problemas relacionados con la no fundamentación de algunos aspectos de la teoría de conjuntos, el descubrimiento de paradojas en dicha teoría y ciertos resultados obtenidos mediante el axioma de selección, trajeron consigo el cuestionamiento de las demostraciones no constructivas de existencia.

La teoría de conjuntos se había transformado a finales del siglo XIX en fundamento del edificio matemático, por lo que era muy importante resolver los problemas que se iban presentando.

El estudio de este tema debe permitir que pueda establecer las relaciones entre elementos y conjuntos o entre conjuntos; realizar operaciones con conjuntos utilizando las propiedades correspondientes a cada una de las operaciones estudiadas; trabajar con seguridad con los diagramas de Venn; demostrar proposiciones relativas a las operaciones con conjuntos.

1.1.2 Elementos y Conjuntos

Consideremos un conjunto como una colección de objetos. Los componentes individuales del conjunto se llaman elementos. Un conjunto puede tener una cantidad finita o infinita de elementos, e incluso no tener elementos.

Un conjunto puede determinarse nombrando cada uno de los elementos que lo integran (por extensión) o por la propiedad que tienen los elementos que lo integran (forma descriptiva).

Cuando se escribe un conjunto puede hacerse en forma tabular o en forma constructiva. Consideremos el conjunto A formado por los dígitos pares.

Forma tabular: A = {0, 2, 4, 6,8}

---

[1] Mario Díaz González. Conjunto. CD de las Ciencias Exactas. 2006

Forma constructiva: A = {x ∈ N: x es par y menor que 10}.

Al escribir los elementos no importa el orden en que se haga. Si hay elementos repetidos en el conjunto, estos se escribirán una sola vez.

El conjunto que no tiene elementos se llama conjunto nulo o vacío y se denota por la letra griega ϕ.

El conjunto que tiene un solo elemento se llama conjunto unitario.

El conjunto A = {2, 8,15} es un conjunto finito de tres elementos.

También son conjuntos finitos: el conjunto formado por los planetas que giran alrededor del Sol. Las sillas que están en el aula, los alumnos de la Facultad donde está usted estudiando, etc.

El conjunto B = {x/ x = 2n, n ∈ N}, es el conjunto de todos los números naturales que son pares, es un conjunto infinito y puede escribirse en notación tabular como B = {0, 2, 4...}

1.1.3 Diagramas de Venn

Los Diagramas de Venn son dibujos que permiten ilustrar las relaciones y las operaciones con conjuntos. Pueden ser cualquier figura geométrica plana que represente a un conjunto determinado, referido a un conjunto mayor que lo contiene al cual llamaremos Conjunto Universo (U).

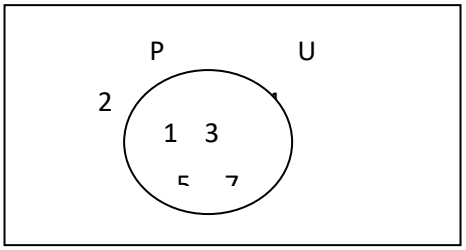


Figura 1: Representación gráfica de conjuntos. Diagramas de Venn.

P = {1, 3, 5, 7}, en el diagrama se cumple que 3 ∈ P y 6 ∉ P

Inclusión de conjuntos.

Un conjunto A es un subconjunto de un conjunto B si y solo si, cada elemento de A es un elemento de B. Se escribe A ⊂ B. Se dice que el conjunto A está incluido en el conjunto B.

Ejemplo 1.- Sea A el conjunto formado por todas las personas que matricularon en una Facultad Obrera Campesina en la Ciudad de Bayamo de la provincia Granma y B el conjunto formado por todas las personas que forman parte de la población de Granma, entonces A ⊂ B.

Igualdad de conjuntos: Dos conjuntos son iguales si y solo si, todo elemento de uno es elemento del otro. Si A y B son dos conjuntos iguales, entonces se escribe A = B y se cumple que A ⊂ B y B ⊂ A, entonces, si E = F, se dice que E es un subconjunto propio de F.

Ejemplo 2.- Sea A = {3, 5, 9, 15} y B = {9, 15, 3, 5} como tienen los mismos elementos, aunque no estén escritos en el mismo orden, entonces A = B.

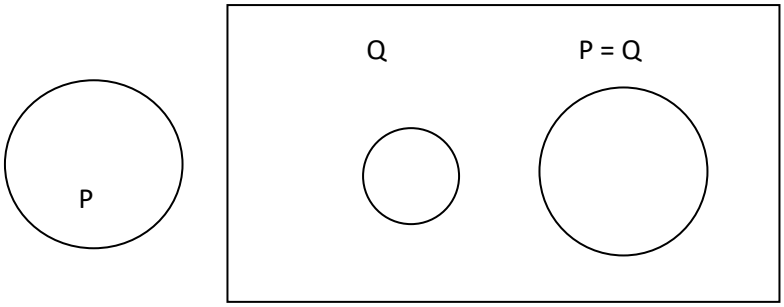


Figura 2: Representación gráfica de la inclusión de conjuntos.

Si $P \subset Q$, entonces P debe estar dentro de Q o ser igual a Q.

Ejercicios resueltos.

Sean los conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; B = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4},

C = {1, 3, 5, 7, 9} y D = {0, 2, 4, 6, 8}

1.- Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifique las falsas.

a). $-4 \in B$ b).$5 \in C$ c).$8 \in A$ d). $7 \notin D$

e). $A \subset B$ f).$C \not\subset A$ g).$C \subset B$ h). $D \subset A$.

2.- Complete utilizando los símbolos $\in, \notin, \subset, \not\subset$, de forma tal que se obtenga una proposición verdadera.

a).3 ____ A b). -5 ____ B `c).6 ____ C d).8 ____ D

e). D ____ A f). B ____ A g).C ____ D h). A ____ C.

3.- Escriba en notación tabular el conjunto $M = \{x \in N \setminus -3{,}4 < x \leq 8{,}286\}$.

Solución de los ejercicios propuestos:

1. a) F. b) V c) V d) V e) F f) F g) F h) V

2. a) $3 \in A$ b) $-5 \notin B$ c) $6 \notin C$ d) $8 \in D$ e) $D \subset A$ f) $B \not\subset A$ g) $C \not\subset D$

h) $A \not\subset C$

3. M = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

1.1.4 Operaciones entre conjuntos

Unión de conjuntos: La unión entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B, o a ambos.

Se escribe $A \cup B$ y se cumple que $A \cup B = B \cup A$.

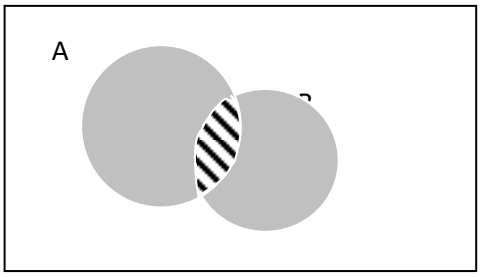


Figura 3: Representación gráfica de conjuntos de la unión.

$x \in A \cup B$ equivale a $x \in A$ o $x \in B$

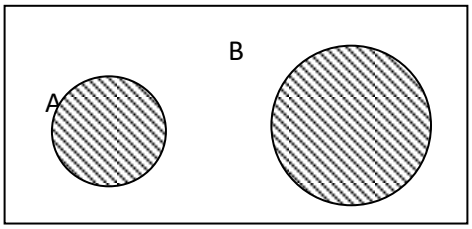


Figura 4: A y B son conjuntos disjuntos

$x \in A \cup B$ equivale a $x \in A$ o $x \in B$

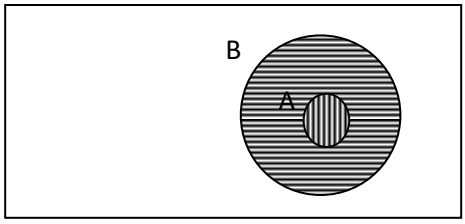


Figura 5: A está incluido en B, para este caso $A \cup B = B$

$x \in A \cup B$ equivale a $x \in A$ o $x \in B$

Intersección de conjuntos: La intersección entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

Se escribe $A \cap B$ y se cumple que $A \cap B = B \cap A$.

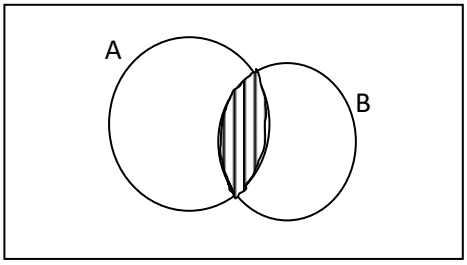


Figura 6: **Representación gráfica de la intersección de conjuntos.**

$x \in A \cap B$ equivale a $x \in A$ y $x \in B$

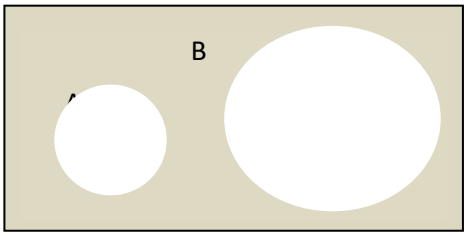


Figura 7: A y B son conjuntos disjuntos, para este caso $A \cap B = \phi$

$x \in A \cap B$ equivale a $x \in A$ y $x \in B$

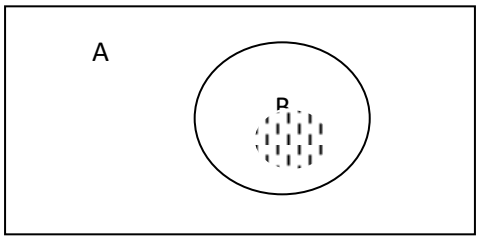


Figura 8: B está incluido en A, para este caso $A \cap B = B$.

$x \in A \cap B$ equivale a $x \in A$ y $x \in B$

Diferencia de conjuntos: La diferencia entre los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Se escribe $A \setminus B$.

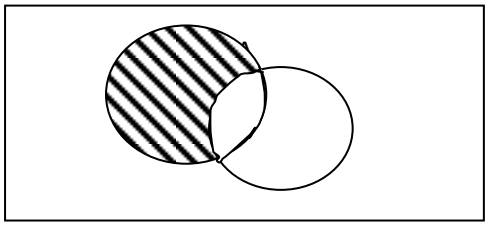


Figura 9: Representación gráfica de la diferencia de conjuntos.

$x \in A \setminus B$ equivale a $x \in A$ y $x \notin B$

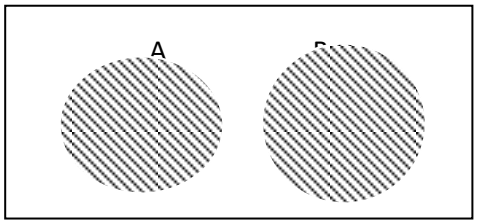


Figura 10: A y B son conjuntos disjuntos, para este caso A \ B = A y B \ A = B.

$x \in A \setminus B$ equivale a $x \in A$ y $x \notin B$

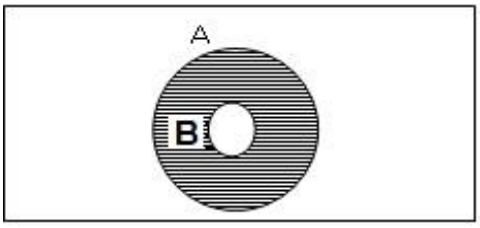


Figura 11: **A está incluido en B**

$x \in A \setminus B$ equivale a $x \in A$ y $x \notin B$

Complemento de un conjunto: Sea U un conjunto universo y A un subconjunto de U, el complemento de A al que llamaremos A^c es el conjunto de elementos de U que no son elementos de A.

Se tiene $A^c = U \setminus A$.

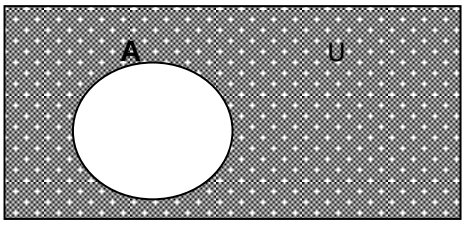


Figura 12: Representación gráfica del complemento de conjuntos.

$x \in Ac$ equivale a $x \in U$ y $x \notin A$.

Ejercicios propuestos.

1.- Sea E un conjunto, $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D \subset E$. Señale verdadero (V) o falso (F) según convenga, en caso de resultar falso transforme la proposición en verdadera:

a). $A \cup \varnothing = A$.

b). $A \cap \varnothing = A$.

c). Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y $A \setminus B = \varnothing$

.

2. - Dados los conjuntos $M = \{x \in N: x \leq 12\}$ $N = \{x \in N: x \geq 4\}$

$P = \{x \in N: -4 \leq x \leq 5,6\}$ Q: Conjunto de los números naturales impares.

Determina:

a). $M \cap N$. b). $M \cap P$. c). $M \cap Q$. d). $N \cap P$

e). $N \cap Q$. f). $P \cap Q$. g). $M \cap N \cap P$. h). $M \cap N \cap Q$

i). $N \cap Q \cap P$ j). $M \cup N$ k). $M \cup P$ l).$M \cup Q$.

m). $N \cup P$. n). $N \cup Q$. ñ). $P \cup Q$. o). $M \cup N \cup P$.

p). $M \setminus N$. q). $M \setminus P$. r). $M \setminus Q$. s). $N \setminus P$.

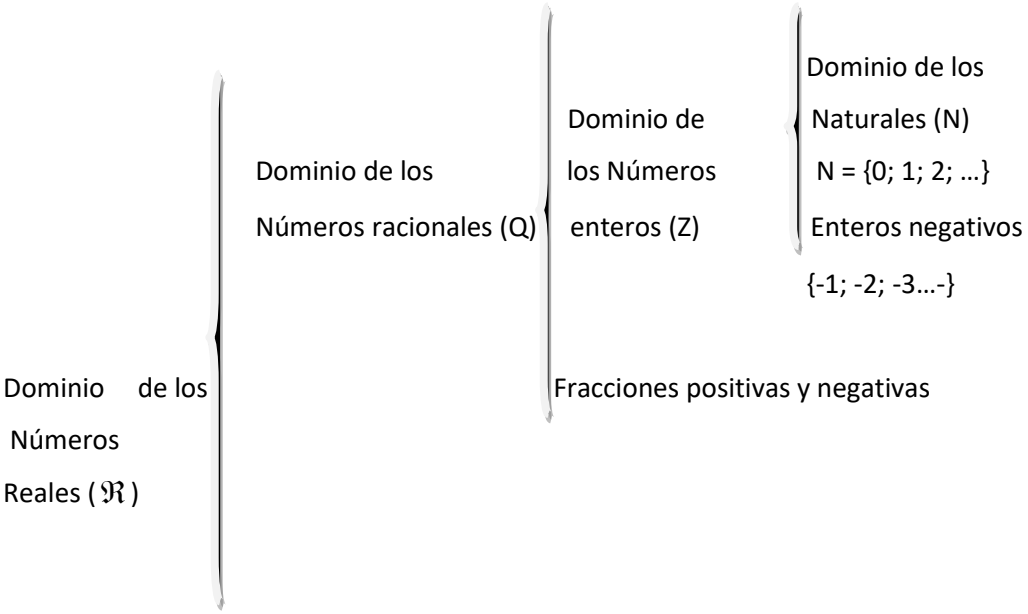
t). $N \setminus Q$. u). $P \setminus Q$. v). M^c. w). N^c.

x). P^c. y). Q^c.

1.2. Dominios numéricos (N, Z, Q+, Q y R)

1.2.1. Repaso y profundización sobre los dominios numéricos

El concepto de número desempeña un papel esencial en la Aritmética y en general en la Matemática; en el transcurso de los estudios realizados en los diferentes cursos escolares haz estudiado diferentes dominios numéricos con los que trabajaremos en toda la preparación para el ingreso a la Educación superior, tal y como se muestra en el gráfico siguiente:



Números Irracionales (I): $\sqrt{3}$; π ; $\sqrt{\frac{3}{2}}$

Los dominios numéricos son los conjuntos **N; Z; Q_+; Q y R,** se cumple que:

N $\subset$ **Z** $\subset$ **Q** $\subset$ **R;** además tenemos que: $Q_+ \subset$ **Q y I** $\subset$ **R**.

A partir de los números naturales (**N**) cada dominio ha tenido que ser ampliado por necesidades prácticas del hombre. Así, se introdujeron los números negativos para indicar ciertas cantidades de magnitudes, como, por ejemplo, la temperatura, o en el orden operacional resolver ecuaciones como la siguiente: x + 8 = 4, cuya solución es x = -4 el cual representa un número entero (Z).

De igual manera surgen los números fraccionarios (**Q+**) los cuales permiten realizar la operación de división en los números naturales y se plantea que:

Un número es racional; si puede ser representado en la forma $\frac{p}{q}$ con p ∈ Z y q ∈ Z, q $\neq$ 0

De igual manera se establecen dos relaciones importantes para considerar a los números racionales.

Ejemplos:

$$5 = \frac{5}{1}; -\frac{1}{5}; 7\frac{5}{4} = \frac{33}{4}$$

Un número es irracional; si no es posible expresarlo en la forma $\frac{p}{q}$

Ejemplos:

$$\sqrt{3}; \pi\ ; -\sqrt[3]{7}$$

Los números racionales se caracterizan por tener un desarrollo decimal periódico, con infinitas cifras.

Ejemplos:

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$ (Se lee cero períodos 3

$\frac{1}{4} = 0{,}25000\ldots$ (Aquí el período es 0)

8 = 8,0000…. (De igual el período también es 0)

Los números irracionales se caracterizan porque su desarrollo decimal no es periódico y posee infinitas cifras:

Ejemplos:

$\sqrt{2} \approx 1{,}4142\ldots$

$\pi \approx 3{,}14159265\ldots$.

e ≈ 2,718…. (Número de Euler)

Un número es real, si es racional o irracional.

En la Matemática son de mucha utilidad el empleo de la representación de conjuntos mediante intervalos de números **R,** que no son más que subconjuntos de números reales, a continuación ilustramos algunos casos:

- (a;b) = {x Є **R**: a < x < b} Intervalo abierto.

  Ejemplo: (-4; 6) = {x Є **R**: -4 < x < 6} ver ilustración **Figura gráfica** 13.

Figura 13: **Intervalo abierto**

Un número es fraccionario; si puede ser representado en la forma $\frac{p}{q}$ con p Є Z y q Є N, q $\neq$ 0

- [a; b] = {x Є **R**: a ≤< x ≤ b} Intervalo cerrado. Ejemplo: [-5; 3] = {x Є **R**: -5 ≤< x ≤ 3}

  Gráficamente: Figura 14.

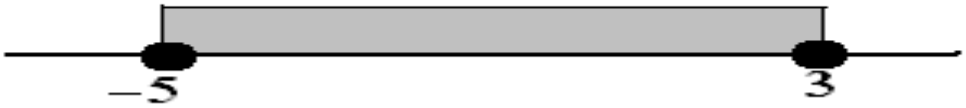


Figura 14: Intervalo cerrado.

- [a; b) = {x ∈ **R**: a ≤< x < b} (Intervalo semiabierto o semicerrado) Ejemplo: [-2; 4) = {x ∈ **R**: -2 ≤< x < 4}: Figura 15.

Figura 15: Intervalo semiabierto o semicerrado

- (a;+∞) = {x / x > a} (Intervalo de infinito).

  Ejemplo: (1; +∞) = {x/ x > 1} Gráficamente se ilustra de la siguiente forma: Figura 16.

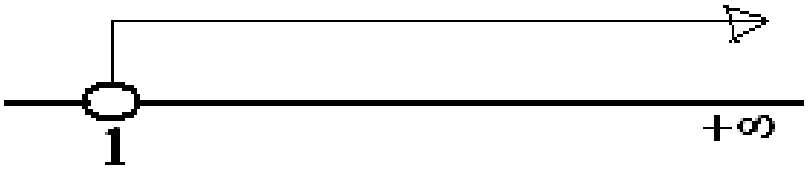


Figura 16: Intervalo de infinito

- (-∞ ; a) = {x / x < a} Ejemplo: (-∞ ; 3) = {x / x < 3} Gráficamente: Figura 16.1

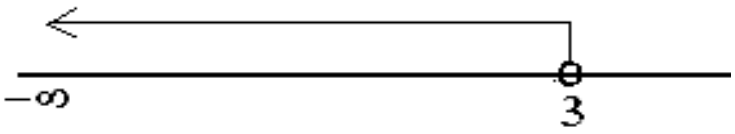


Figura 16.1

Ejercicios Resueltos:

Di cuál es el dominio más restringido al que pertenecen los siguientes números:

a) -7 b) 2,005 005 005…. c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt[3]{64}$ e) $-4\frac{2}{5}$ f) 5,32

g) 2,010 110 01….

Solución:

a) Z b) Q c) R d) N e) Q f) R g) Q

Escribe en notación tabular los siguientes conjuntos:

A = {x ∈ N / x < 6}

M = {x ∈ Z / -3 < x < 5}

O = {x ∈ Q / 3x – 1 = 0}

R = {x∈ R / -2 ≤ x ≤ 1}

Solución:

a) A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} b) M = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}

c) Si 3x-1 = 0, entonces x = $\frac{1}{3}$ ∉ Z; luego O = { }

d) R: No es posible expresarlo en forma tabular ya que el conjunto es infinito.

Sean los conjuntos:

C = [3; 7) U = (-2; 5) B = [3; +∞) y A = (-∞; 6)

Calcula:

a) **C ∪ U** b) **U ∩ B** c) **U \ C** d) $\mathbf{A^C}$

Solución: Veamos la representación gráfica de todos estos intervalos en la figura 17.

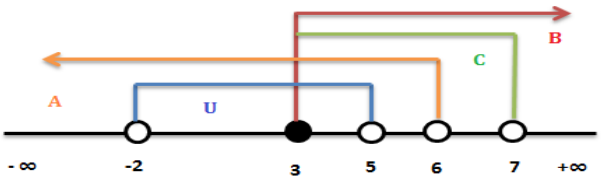


Figura 17: Gráfica de todos los intervalos

a) C $\cup$ U = (-2; 7) b) U $\cap$ B = [3; 5) c) U \ C = (-2: 3) d) AC = [6; +∞)

Cada uno de estos conjuntos puede ser representado de igual forma gráficamente en forma de intervalos.

Ejercicios propuestos:

1. Di si son verdaderos (V) o falsas (F) las siguientes proposiciones. Justifica las falsas.

a) 3,25 $\notin$ Z

b) $\frac{1}{5} \in \mathbb{N}$

c) Q es un dominio numérico.

d) El número de habitantes de un país es siempre un número entero.

a) En el conjunto de los números reales siempre es posible encontrar la raíz cuadrada de un número negativo.

b) Todo número real es racional.

c) $-\frac{3}{5} \notin Q_+$

d) El conjunto de los cuadrados es un subconjunto de los trapecios.

2. Sean los conjuntos:

M = {x $\in \Re$: x $\leq$ 10}; P = {x $\in \Re$: -4 $\leq$ x < 12} y Q = (-∞; $\frac{9}{2}$]

Determina gráfica y analíticamente los conjuntos siguientes:

a) S = (M $\cup P) \cap Q$ b) P \ Q

3. Sea el conjunto:

$$A = \left\{ -\sqrt{36} \; ; -2 \; ; 0 \; ; \frac{1}{4} \; ; 7{,}0101\ldots \; ; 5\tfrac{1}{2} \; ; 2{,}53 \; ; 1{,}\overline{7} \; ; \frac{1}{3} \right\}$$

a): Forma a partir del conjunto A los siguientes conjuntos:

M: Es el conjunto formado por los números que sean naturales.

D: Es el conjunto formado por los números que no sean enteros.

T: Es el conjunto formado por los números que sean racionales.

H: Es el conjunto formado por las expresiones decimales periódicas.

b) Encuentra si existe:

- El conjunto formado por los elementos comunes a los conjuntos M y T.
- El conjunto formado por los elementos que están en el conjunto T y que no están en el conjunto M.
- El conjunto formado por los elementos que están en el conjunto H y que no están en el conjunto T.

4. En la tabla se muestran las temperaturas de fusión de algunas sustancias:

SUSTANCIAS	TEMPERATURA DE FUSIÓN
Agua	0°C
CO_2	- 11,2° C
Éter	- 14°C
Parafina	70°C

a) Entre qué números enteros se halla la temperatura de fusión del CO_2.

b) Ordena las temperaturas de fusión en forma descendente.

c) Entre el agua y el éter ¿Cuál tiene menor temperatura de fusión?

1.3. Potenciación

Potencias de exponente entero, fraccionario y racional. Monotonía de la potenciación. Raíz n-ésima de un número real. Resolución de problemas donde se combinen las diferentes operaciones, el tanto por ciento y tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud.

Para realizar ejercicios relacionados con esta temática es necesario tener en cuenta el orden que debemos seguir para realizar las operaciones de cálculo numérico el cual lo recordamos a continuación:

1ero. Se realizan la potenciación y la radicación.

2do. Se realiza la multiplicación y la división según el orden en que aparezcan.

3ero. Se efectúa la adición y la sustracción.

Es importante que para esto tengamos en cuenta las propiedades de las potencias tal y como se muestra en el cuadro siguiente, tanto en los exponentes naturales, enteros o racionales, así como la definición de la raíz n-ésima de un número:

Tabla 1: Propiedades de la potencia.

$a^1 = a$	$a^0 = 1$	$a^{-k} = \frac{1}{a^k}$
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$a^n \div b^n = (a \div b)^n$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Otra condición importante es tener en cuenta el cálculo con proporciones, las cuales permiten determinar el tanto por ciento y el tanto por mil, tal y como se muestra a continuación:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces se pueden obtener cada una de las siguientes relaciones:

a) $a = \frac{b \bullet c}{d}$; b) $b = \frac{a \bullet d}{c}$; c) $c = \frac{a \bullet d}{b}$; d) $d = \frac{b \bullet c}{a}$ las cuales son de gran utilidad por el cálculo con por ciento.

Ejercicios Resueltos:

1. Calcula:

a) $30 - 2 \bullet 3^2 + 10^{-2}$

b) 25% de 76

c) $\left(2\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\right)\div\frac{5}{32}+\sqrt{\frac{9}{64}}\bullet\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{27}}$

d) ¿Qué tanto por ciento de 180 es 135?

e) $\frac{12{,}5\bullet 2^{13}\bullet 5^{13}}{0.05\bullet\left(10^{8}\right)^{2}}$

Solución:

a) $30-2\bullet 3^{2}+10^{-2}$

$=30-2\bullet 9+\frac{1}{10^{2}}$ (calculando las potencias)

= 30 – 18 + 0,01 (calculando el producto y la expresión decimal de 10^{2})

= 12 + 0,01

= 12,01 (efectuando la adición y la sustracción)

b) 25% de 76

Sabemos que: 25% = $\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$ y además que $76\bullet\frac{1}{4}=19$, por tanto, la respuesta es 19.

c) $\left(2\frac{1}{2}-\frac{5}{8}\right)\div\frac{5}{32}+\sqrt{\frac{9}{64}}\bullet\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{27}}$

$=\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{8}\right)\bullet\frac{32}{5}+\frac{3}{8}\bullet\frac{4}{3}$ (Se calculan las raíces y se transforma la división en producto)

$=\left(\frac{20-5}{8}\right)\bullet\frac{35}{32}+\frac{12}{24}$ (Se realiza la operación dentro del paréntesis y el producto de las dos fracciones)

$=\frac{15}{8}\bullet\frac{32}{5}+\frac{1}{2}$ (Efectuando el paréntesis)

$=12+0{,}5=12{,}5$ (Simplificando las fracciones)

d) Para realizar este ejemplo debemos aplicar una regla de tres como se ilustra a continuación:

Número	Representa en %
180	100
135	x

Por tanto, según recordamos en las proporciones se obtiene lo siguiente:

$$x = \frac{135 \bullet 100}{180} = \frac{13500}{180},$$

x= 75%

e) $$\frac{12{,}5 \bullet 2^{13} \bullet 5^{13}}{0.05 \bullet \left(10^{8}\right)^{2}} = \frac{12{,}5 \bullet 10^{13}}{0{,}05 \bullet 10^{16}} = 250 \bullet 10^{-3} = \frac{250}{1000} = 0{,}25$$

1. Las dimensiones de un terreno rectangular son 75 m de largo (a) y 600 dm de ancho (b). El 60% de su área se dedica al cultivo de vegetales y el resto del terreno está ocupado por una casa. ¿Qué área se dedica a cada menester?

Solución:

Datos: Cálculo del área del rectángulo:

a = 75 m

b= 600 dm = 60 m A = $a \bullet b$ = 75 m ● 60 m = 4500 m²

Cultivo de vegetales: 60% de 4500 m² = $\frac{60}{100} \bullet 4500 m^2 = 2700 m^2$

Vivienda: 4500 m² - 2700 m² = 1800 m²

Ejercicios propuestos:

1. Calcula;

a) $\left(\frac{5}{8} - \frac{7}{16}\right) \div \frac{9}{64}$ b) $5 - 131^{0} + \frac{\sqrt{18 + 3 \bullet 6}}{2} - 16^{\frac{1}{2}}$

c) $\dfrac{2\frac{3}{4}-\frac{5}{8}}{6\frac{4}{5}}+0{,}375$ d) $2{,}75-0{,}65\bullet 0{,}4+0{,}625\div 2{,}5$

2. Dadas las expresiones: B = $\dfrac{5\bullet 4}{8\bullet 10^{39}\div 10^{37}}$ y C = $\dfrac{2{,}25\bullet 5^{17}\bullet 2^{17}}{1{,}5\bullet\left(10^{9}\right)^{2}}$

   a) Determine el valor de la expresión B.

   b) Calcula la expresión C y escribe un número que sea menor que el resultado y otro que sea mayor.

3. Si con $\frac{3}{8}$ de galón de pintura de vinyl se pueden pintar 9,3 m² de superficie, halla los metros cuadrados que se pueden pintar con 15 galones de pintura.

4. En un organopónico hay 40 canteros sembrados de diferentes hortalizas, de ellos se sabe que la cuarta parte están sembrados de lechugas, la quinta parte del resto están sembrados de pepinos, la tercera parte del resto están sembrados de tomates y los restantes de col. ¿Cuántos canteros están sembrados de col?

5. En cuál de estos pares de números, el número - 4,05 es mayor que el primer número y menor que el segundo número. Fundamenta tu respuesta.

   - 4 y - 3 $-\frac{9}{2}$ y $-4{,}15$ $-\frac{23}{5}$ y -4

6. El promedio de M y N donde $M = 64 - 18 : 3^{1}$ y $N = \frac{5}{4} + \frac{33}{12}$ es:

   a) 33 b) 66 c) 4 d) ninguno de los anteriores.

7. Si $x=\frac{1}{3}$ y $y=\frac{9}{7}$ entonces el valor numérico de la expresión $x : y - 2x^{2} + 1$ es:

   a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{24}{31}$ c) $\frac{2}{27}$ d) Ninguno de los anteriores

1.3.1 Resolución de problemas donde se combinen las diferentes operaciones, el tanto por ciento y tanto por mil y el trabajo con cantidades de magnitud

Para resolver cualquier tipo de problema es necesario tener en cuenta las sugerencias que aparecen en el siguiente cuadro:[2]

1. Lee cuidadosamente el problema para comprender la situación que plantea.
2. Determina los datos y designa las incógnitas necesarias.
3. En caso de que exista una sola incógnita identifícala con una sola letra, generalmente x. en caso de que exista más de una, elige de manera conveniente la que se va a representar mediante x, y expresa las otras cantidades desconocidas en términos de la misma.
4. Busca en el problema las relaciones o combinaciones existentes que te permitan formular la ecuación.
5. Resuelve la ecuación o ecuaciones obtenidas en correspondencias con los datos planteados y las relaciones establecidas.
6. Comprueba la solución directamente en el enunciado del problema, nunca en la ecuación o ecuaciones. Esta comprobación la puedes hacer en la mente.
7. Establece la respuesta del problema de acuerdo a lo que se te pregunta en el mismo.

Ejercicios resueltos:

1. Para un entrenamiento de Matemática Juan, Raúl y Luis realizan individualmente cada mes la misma cantidad de ejercicios durante 3 meses. Se sabe que entre Juan y Luis hicieron 270 ejercicios el primer mes, Luis y Raúl hicieron 220 ejercicios el segundo mes y entre Raúl y Juan realizaron 250 ejercicios el último mes. Entonces los ejercicios realizados por Raúl cada mes fueron:

a) 110 b) 125 c) 100 d) 120

2. Tenemos 60 m de cinta y damos cuatro cortes para dividirla en partes iguales. El primer pedazo se vende a $4,50 pesos cada metro, el segundo pedazo a $6,00 pesos el metro y el resto a $5,50 pesos el metro. ¿Cuánto se obtiene por la venta? Selecciona la respuesta correcta.

a) $ 3 225,00 b) $ 320,00c) $ 322,50 d) $ 3 224,00

$\frac{2}{3}$

[2] MINED. Libro de texto de Matemática Décimo grado. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana. 1989. Página 52

3. Un artículo cuesta $ 474,00 pesos. Se puede comprar a plazos entregando en el primer plazo de su importe, en el segundo plazo la mitad de lo restante y en el tercero lo que le falta para completar el precio. a) ¿Cuánto ha de pagar en cada plazo? b) ¿Qué tanto por ciento pagó en el último plazo?

Soluciones:

1. Para razonar en este problema el estudiante una vez leído el problema debe pensar en como representar con variables la cantidad de ejercicios realizados por cada estudiante, según el análisis se puede expresar lo siguiente:

Datos:

EJERCICIOS RESUELTOS POR:	ANÁLISIS DEL PROBLEMA.
Juan… J	J + L = 270 Primer mes
Raúl… R	L + R = 220 Segundo mes
Luís… L	J + R = 250 Último mes

Con los valores dados debemos probarlos en cada una de las ecuaciones obtenidas y analizar que son valores iguales en las tres ecuaciones planteadas, veamos:

a) Si fueran 110 entonces Luís es 110 también y Juan 240, lo cual no cumpliría la primera condición.

b) Si fueran 125, entonces la cantidad de Luís es de 95 y la de Juan 125, los cuales no satisfacen la ecuación 1.

c) Si la cantidad es de 100 ejercicios, entonces la de Luís es de 120 ejercicios y la de Juan 150 y valorando con la primera proposición se satisface, por lo tanto la misma representa la respuesta correcta.

2. Primeramente se divide 60 m: 4 = 15 m, medida de cada una de las partes.

Operaciones a realizar:

$15m \bullet \$4{,}50 = \$67{,}50$

$15m \bullet \$6{,}00 = \$90{,}00$

$30m \bullet \$5{,}50 = \$162{,}50$

Al efectuar la suma entre estos resultados se Obtiene como respuesta correcta b) $320,00

3. a) Primer plazo: $\frac{2}{3} \bullet \$474{,}00 = \$316{,}00$

Falta por pagar \$474,00 - \$316,00= \$158,00

Segundo Plazo: $\frac{\$158{,}00}{2} = \$79{,}00$

Tercer plazo: \$158,00- \$79,00 = \$79,00

b) Para calcular el por ciento del último plazo haremos lo siguiente:

Importe	Representa en %
\$474,00	100
\$ 79,00	x

de donde obtenemos que:

$$x = \frac{\$79{,}00 \bullet 100}{\$474{,}00} = \frac{\$7900}{\$474{,}00}$$

x = 16,67%

Ejercicios propuestos:

1. De una pieza de tela de 12 m una señora compra las $\frac{3}{4}$ partes de la misma. De aquí corta los $\frac{2}{3}$ para hacer una sábana. ¿Cuántos metros utilizó para la sábana? ¿Qué por ciento de la pieza ha usado?

2. Alejandro y Eduardo son estudiantes de un instituto vinculado a labores agrícolas y entre ambos recogen en una jornada 104 sacos de papas. Si el triple del número de sacos recogidos por Alejandro excede en 72 sacos a los sacos recogidos por Eduardo. Determina:

a) ¿Cuántos sacos más recogió Eduardo que Alejandro?

b) ¿Qué tanto por ciento de la cantidad de sacos recogidos por Eduardo representan la cantidad de sacos recogidos por Alejandro?

3. Un obrero tiene un plan de producción mensual de 1800: en la primera semana realizó el 25% de la meta, en la segunda $\frac{3}{5}$ del resto y en la tercera 360 piezas. ¿Qué por ciento representan las piezas que le faltan del total?

4. Una brigada de una Cooperativa se propone recoger en 3 días cierta cantidad de quintales de tomates. El primer día recoge un tercio de esa cantidad, el segundo día el 40% del resto y el tercer día 210 quintales. ¿Qué cantidad de quintales de tomates se propuso recoger esa brigada?

5. En cierto país el precio que se paga por enviar un telegrama se calcula de la siguiente forma: Si el telegrama tiene 10 palabras o menos se paga un precio fijo. Si tiene más de 10 palabras, entonces se paga el precio fijo (por las 10 primeras palabras) y una cantidad extra por cada palabra adicional. Un telegrama de 15 palabras cuesta $11,65 y uno de 19 palabras $14,57. ¿Cuál es el precio fijo y cuál es la cantidad extra por cada palabra adicional?

6. Alejandro hizo dos llamadas desde Quito, una a Ambato y la otra a Guayaquil. La operadora al final le informa que habló en cada ocasión más de 3 minutos y que en total estuvo conversando 15 minutos, por lo que debe pagar $7,40. Más tarde, Alejandro consultó la siguiente tabla para saber lo que le cobraron por cada llamada:

Desde la ciudad a los siguientes territorios	Tres minutos	Minuto adicional
Manabí, Portoviejo, Guayaquil	1,00	0,25
Latacunga, Ambato, Pelileo	2,40	0,60

a. ¿Cuántos minutos estuvo hablando Alejandro con cada territorio?

b. ¿Cuánto pagó por cada llamada?

7. Como parte de las medidas de beneficio a la población, en Jipijapa, dos brigadas de trabajadores sociales A y B se planificaron visitar entre ambas 330 viviendas. En un momento en que fue controlada la actividad, la brigada A había visitado las dos terceras partes de la cantidad de viviendas que se había propuesto visitar, mientas que la B, había visitado el 80% de las viviendas que se había planificado visitar. Si en ese momento solo faltaban por visitar 86 viviendas, ¿cuántas habían visitado cada brigada, hasta el momento en que fue controlada la actividad?

8. Con la finalidad de hacer un completamiento del uniforme (un pantalón y una camisa) de los trabajadores de una empresa, el administrador hizo una compra al almacén de 20 pantalones y 50 camisas por un valor de $ 1 500.00. Posteriormente, por el mismo precio de cada pieza, se hizo una segunda compra de 5 pantalones y 4 camisas por un valor de $ 205.00. Si posteriormente llegaron a la empresa tres nuevos trabajadores, ¿cuánto debe pagar la administración por la compra de los tres últimos uniformes?

9. De los casi 855 millones de adultos analfabetos que había en el mundo en 1998, cerca de dos terceras partes son mujeres. ¿Cuántas mujeres analfabetas aproximadamente había en 1998? (Hechos y cifras 1998, UNICEF).

10. En 1995 la deuda externa de Nigeria era de 35005000 dólares y representaba aproximadamente 6 veces la de Mozambique en esa misma fecha. Determine cuál era la deuda externa de Mozambique en ese momento.

11. Normalmente a diario por la piel y la respiración se pierden mil mililitros de agua. Durante la fiebre, por cada grado mantenido se pierden alrededor de 200 mililitros en 24 horas. ¿Cuál es la pérdida de agua en el cuerpo humano como consecuencia de una temperatura sostenida de 38,5º C durante tres días?

12. En una obra del escritor La Fontaine aparece lo siguiente:

Vamos a repartir este cordero, dijo el león, dirigiéndose al mono y al zorro. Puesto que somos tres, me toca en primer lugar un tercio: es justo. Seguidamente como Rey de los Animales me corresponde como tributo, además, la mitad del cordero. Finalmente, me corresponde también, porque así lo quiero, la sexta parte del cordero. El resto lo reparten entre ustedes.

¿Cómo les fue en el reparto al mono y al zorro? Justifique su respuesta.

13. En un tubo de crema antibiótica se puede leer: Cada 100 gramos contiene 200 mg de neomycin ¿Qué porcentaje de neomycin contiene la crema?

14. La leche de vaca da aproximadamente el 12% de su masa en crema y esta a su vez el 35% en mantequilla. ¿Qué porcentaje de mantequilla da la leche?

15. Los petroleros de una región al terminar el mes de abril del año 2003 extrajeron 750 000 toneladas de crudo, lo que representa un dos por ciento de sobrecumplimiento del plan para esta fecha. En el 2002 se produjeron 1 678 204 toneladas, lo que representó un 14,8% más que en el 2001.

a) ¿De cuántas toneladas era el plan de los petroleros para el mes de abril del 2003?

b) ¿Cuántas toneladas produjeron en el 2001?

16. La velocidad de un barco en agua tranquila es de 25 km. por hora y la velocidad de la corriente de un río es de 10 Km. por hora ¿Qué tiempo tardará el barco en un viaje de ida y vuelta de un punto al otro del río, si la distancia entre ellos es de 105 Km?

17. Un tanque tiene dos llaves y un desagüe. La primera llave vierte 45 litros cada 3 minutos, la segunda 100 litros cada 5 minutos y por el desagüe salen 200 litros cada 4 minutos. Si estando lleno el

tanque se abren al mismo tiempo las dos llaves y el desagüe se vacía en hora y media. Halle la capacidad del tanque.

18. En un tonel que contiene agua, se extrae primero la tercera parte del total y luego el 20% de lo que le quedaba y aún quedan 16 L. ¿Cuántos litros de agua había al principio?

19. Todos los estudiantes de décimo grado de un centro participaron en las Brigadas Estudiantiles de Trabajo durante 15 días. Del total de alumnos, 72 trabajaron en una industria, el 80 % del resto en un organopónico y los 19 restantes integraron una brigada para la reparación de la escuela. ¿Cuál es la matrícula de décimo grado en este centro de estudios?

20. A tres escuelas A, B y C se les hizo entrega de nuevas mesas a través de los envíos siguientes**:**

1. envío: 270 mesas para A y B

2. envío: 220 mesas para B y C

3. envío: 250 mesas para A y C

Si en cada envío cada escuela recibe la mitad de las mesas que le están asignadas.

a) ¿Cuántas mesas le corresponde a cada escuela?

b) Si sale un cuarto envío con 1256 sillas, ¿en qué tanto por ciento se cubren las necesidades de las tres escuelas?

21. Una finca tiene un área de 120 ha. El 60% de su extensión se dedica al cultivo de caña y $\frac{5}{12}$ del resto está dedicada al cultivo de vegetales, y la extensión que queda se dedica al pastoreo.

a) ¿Qué extensión se dedica a cada cultivo

b) ¿Qué tanto por ciento de la extensión de la finca se dedica a pastoreo?

22. Un profesor de Matemática les indica a sus alumnos una tarea. El primer día un alumno realizó 1/8 de los ejercicios propuestos, el segundo día realizó 4/7 del resto, quedándole por realizar 12 ejercicios. ¿Cuántos ejercicios dejó el profesor de tarea?

23. Un hombre y su hijo, trabajando juntos, pueden hacer una obra en 12 días. Trabajando separadamente, el hijo tardaría 7 días más que el padre en hacer él solo la obra. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno trabajando separadamente?

24. Dos amigos están a 300 m de distancia. Si corren el uno hacia el otro, se encuentran en 20 segundos; pero, si corren en el mismo sentido, el más rápido alcanza al otro en 5 min. Halla la velocidad de cada uno.

25. Una piscina se puede llenar por una llave en 4 horas, por otra llave en 3 horas y se puede vaciar por un desagüe en 6 horas. Si se abren simultáneamente las dos llaves y el desagüe, ¿en qué tiempo se llenará la piscina?

1.4. Radicales

En el transcurso de los estudios realizados tanto en la Secundaria Básica, así como en el curso de preuniversitario, has calculado la raíz cuadrada y cúbica de números positivos, por simple inspección o por tablas justificando su resultado con la potenciación.

Ejemplos:

$\sqrt{64} = 8$, o sea, $8^2 = 64$

$\sqrt[3]{125} = 5$, o sea $5^3 = 125$

$\sqrt{6} = 2{,}45$, o sea, $(2{,}45)^2 \approx 6$ (por tabla)

$\sqrt[3]{9} = 2{,}08$, o sea, $(2{,}08)^3 \approx 9$ (por tabla)

De igual forma debes conocer que: Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas: una positiva (raíz aritmética) y otra negativa. Los números negativos no tienen raíces cuadradas en **R.**

Ejemplos:

$\sqrt{81} = \pm 9$ **,** puesto que $(\pm 9)^2 = 81$

$\sqrt{-16}$: No está definida en **R.**

Todo número real posee una raíz cúbica, por ejemplo:

$\sqrt[3]{27} = 3$, ya que $3^3 = 27$

$\sqrt[3]{-64} = -4$, ya que $(-4)^3 = -64$

Definición:

1.4.1. Propiedades de los radicales

Tabla 2: Resumen de las propiedades de los radicales.

PROPIEDADES	**EJEMPLOS**
a) $\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \bullet b}$	$\sqrt[3]{4} \bullet \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{24}$
b) $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b}$	$\sqrt{20} \div \sqrt{5} = \sqrt{4} = 2$
c) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{7}\right)^2 = \sqrt[3]{7^2}$
d) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[15]{3}$

En el trabajo con los radicales podemos en muchas ocasiones simplificarlos sin que el resultado se altere y así trabajar con expresiones más simples, por ejemplo:

$\sqrt[15]{2^{30}} = 2^2$ porque $\left(2^2\right)^{15} = 2^{30}$ pero

$\sqrt[12]{2^{24}} = 2^2$ porque $\left(2^2\right)^{12} = 2^{24}$ luego se puede afirmar que

$\sqrt[15]{2^{30}} = \sqrt[12]{2^{24}} = 2^2$

Sean b ∈ **R** y n ∈ **N**, n > 1, se llama raíz enésima de b, a todo número real x, que satisface la ecuación $x^n = b$. Si la ecuación no tiene solución, b no tiene raíz enésima.

Este tipo de ejemplo nos permite valorar como aplicando las propiedades de los radicales estos se pueden simplificar ya que el exponente del radicando y el índice del radical son divisibles por un mismo número, existen además otros radicales que no se pueden simplificar como los siguientes:

$\sqrt[4]{3^3}$; $\sqrt[3]{81}$; $\sqrt{27} = \sqrt{3^3}$

Ejercicios resueltos:

1. Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[8]{7^6}$; b) $\sqrt[6]{4}$; c) $\sqrt[9]{125a^6}$ d) $\sqrt[4]{625x^8y^{12}}$

Solución:

a) $\sqrt[8]{7^6} = \sqrt[4\bullet 2]{7^{3\bullet 2}} = \sqrt[4]{7^3}$

b) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt[9]{125a^6} = \sqrt[9]{(5a^2)^3} = \sqrt[3]{5a^2}$

d) $\sqrt[4]{625x^8y^{12}} = \sqrt[4]{(5x^2y^3)^4} = 5x^2y^3$

En el trabajo con los radicales en determinadas ocasiones se puede trabajar también como operación inversa de la potenciación teniendo en cuenta la siguiente definición:

Si a > 0:

$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ con m, n $\in$ Z; n> 1

$a = 0^{m/n} = 0$

Esta definición permite establecer el concepto de potencia a exponente racional y en caso particular se cumple que: Si m = 1 se cumple que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Lo estudiado con anterioridad acerca de los radicales es importante recordar lo siguiente:

Un radical está simplificado cuando:

- El índice no tiene factores comunes con el exponente del radicando.
- Se han extraído los factores que son raíces

Por otro lado, se tiene que en la práctica en muchas ocasiones se hace necesario calcular con radicales que tienen índices diferentes y, para hacerlo, se **reducen a un índice común.** Esta reducción a un índice común es completamente análoga a la reducción de fracciones a un denominador común, teniendo en cuenta que los radicales se pueden escribir como potencias de exponente racional, por lo tanto, seguimos los siguientes pasos para esta reducción:

1. Se busca el mcm de los índices.
2. En cada radical, se multiplica el índice y el exponente del radiando por el factor necesario para que el índice sea el mcm hallado.

Los radicales $\sqrt[9]{3^2}$ y $\sqrt[6]{3}$ se pueden expresar con el mismo índice de la forma siguiente:

a) $\sqrt[9]{3^2} = \sqrt[9\bullet 2]{3^{2\bullet 2}} = \sqrt[18]{3^4} = \sqrt[18]{81}$

b) $\sqrt[6]{3} = \sqrt[6\bullet 3]{3^3} = \sqrt[18]{3^3} = \sqrt[18]{27}$, lo analizado en este ejemplo nos permite señalar también que: $\sqrt[9]{3^2} > \sqrt[6]{3}$, porque en el mismo índice 81 > 27.

Ejercicios resueltos:

1. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{16}$ b) $\sqrt[6]{(a+b)^8}$ (a > -b) c) $\sqrt[n]{b^{n^2}}$ d) $\sqrt[3]{x^4 y}$ e) $\sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4}$

f) $\sqrt[4]{\dfrac{a^8 b^3}{81z^5}}$

Solución:

a) $\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$ b) $\sqrt[6]{(a+b)^8} = \sqrt[3]{(a+b)^4} = (a+b)\sqrt[3]{a+b}$

c) $\sqrt[n]{b^{n^2}} = \sqrt[n]{(b^2)^n} = b^2$ d) $\sqrt[3]{x^4 y} = \sqrt[3]{x^3 xy} = x\sqrt[3]{xy}$

e) $\sqrt[3]{64x^3y^{-3}z^4} = \sqrt[3]{\frac{4^3 z^3 z}{y^3}} = \frac{4z}{y}\sqrt[3]{z}$

f) $\sqrt[4]{\frac{a^8b^3}{81z^5}} = \sqrt[4]{\frac{a^8b^3}{3^4 z^4 z}} = \frac{a^2}{3z}\sqrt[4]{\frac{b^3}{z}}$

2. Ordena los siguientes radicales de menor a mayor (en forma creciente)

a) $\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{12}$

Solución:

a) $\sqrt[6]{3}$; $\sqrt[3]{7}$ y $\sqrt[4]{5}$ y como el mcm (3; 4, 6) = 12 debemos llevar los tres radicales al índice 12 para poder ordenar.

$\sqrt[6]{3} = \sqrt[12]{3^2} = \sqrt[12]{9}$

$\sqrt[3]{7} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401}$ Como 9 < 125 < 2401

$\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ Entonces $\sqrt[6]{3} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{3}$ y $\sqrt[8]{12}$ como el mcm (2; 4; 8) = 8 entonces se deben expresar los tres radicales en ese índice para comparar:

$\sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{2^2} = \sqrt[8]{4}$

$\sqrt{3} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt[8]{81}$ Como 4 < 12 < 81

$\sqrt[8]{12}$ Entonces $\sqrt[4]{2} < \sqrt[8]{12} < \sqrt{3}$

Ejercicios propuestos:

1. Simplifica los radicales siguientes:

a) $\sqrt[6]{m^3}$ b) $\sqrt[4]{16x^5y^4}$ c) $\sqrt[3]{a^3b^4(a+b)^3}$ d) $\sqrt[4]{\frac{128(x-y)^5}{81(x+y)^4}}$ (x > y > 0)

2. Reduce los siguientes radicales a un índice común. Considera positivas todas las variables y expresiones que aparecen.

a) $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[4]{a^3}$ b) $\sqrt[3]{10}$ y $\sqrt{96}$ c) $\sqrt[8]{xyz}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ y $\sqrt[12]{m}$

3. Si sabemos que $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ con $0 \le a \le b$, compara los siguientes radicales ordenándolos en forma decreciente;

a) $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{11}$; $\sqrt[4]{8}$ b) $\sqrt[6]{2}$; $\sqrt[4]{5}$; $\sqrt[5]{2}$ c) $\sqrt[5]{25}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[6]{2}$

d) $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt{y^2}$; $\sqrt[8]{x}$ (x < y, x > 1)

4. Ordena los siguientes radicales en orden decreciente:

a) $\sqrt[3]{15}; \sqrt[6]{226}; \sqrt{6}$ b) $\sqrt[8]{441}; \sqrt{5}; \sqrt[4]{18}$

5. Seleccione la respuesta correcta en cada uno de los siguientes incisos:

a) Dados los radicales $\sqrt[5]{17}; \sqrt[10]{291}; \sqrt{3}$, entonces podemos afirmar que:

1) __ $\sqrt[5]{17} < \sqrt{3} < \sqrt[10]{291}$; 2) __ $\sqrt{3} < \sqrt[5]{17} < \sqrt[10]{291}$; 3)__ $\sqrt[10]{291} < \sqrt[5]{17} < \sqrt{3}$

4) __ No se pueden comparar porque no tienen igual índice.

b) Sean los radicales: $\sqrt[3]{18}; \sqrt{7}; \sqrt[6]{323}$, entonces se obtiene que:

1) __ $\sqrt[6]{323} < \sqrt[3]{18} < \sqrt{7}$; 2) __ $\sqrt[3]{18} < \sqrt{7} < \sqrt[6]{323}$; 3) ___ $\sqrt{7} < \sqrt[6]{323} < \sqrt[3]{18}$

4) __ No se pueden comparar porque no tienen igual índice.

1.4.2. Radicales semejantes. Adición y sustracción de radicales

En todo el estudio realizado en el transcurso por el bachillerato conoces de los términos semejantes, los cuales se consideran de gran uso para operar con radicales, teniendo en cuenta lo siguiente:

Dos radicales que tienen igual índice e igual radicando se llaman radicales semejantes.

Así de esta manera podemos señalar que son semejantes los siguientes radicales:

a) $\sqrt{x}$ y $35\sqrt{x}$ b) $2\sqrt[3]{7}$ y $-5\sqrt[3]{7}$ c) $4a^2b\sqrt[5]{x+y}$ y $3ab^2\sqrt[5]{x+y}$

d) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2-3x}$ y $m^2\sqrt[4]{x^2-3x}$

No son semejantes $5\sqrt{3}$ y $6\sqrt[3]{3}$ tampoco lo son $12\sqrt[4]{a}$ y $12\sqrt{a}$

Debes recordar que para sumar y restar radicales semejantes se procede igual que cuando se reducen términos semejantes:

Ejercicios resueltos:

Calcula:

a) $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3}$ b) $-4\sqrt[3]{m^2}+9\sqrt[3]{m^2}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{a^3}$ d) $a^2\sqrt{5x}-2a\sqrt{5x}+\sqrt{5x}$

Solución:

a) $7\sqrt{3}+2\sqrt{3}-5\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b) $-4\sqrt[3]{m^2}+9\sqrt[3]{m^2} = 5\sqrt[3]{m^2}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{4}\sqrt[4]{a^3} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\sqrt[4]{a^3} = \frac{3}{4}\sqrt[4]{a^3}$

d) $a^2\sqrt{5x}-2a\sqrt{5x}+\sqrt{5x} = (a^2-2a+1)\sqrt{5x}$

2. Calcular:

a) $10\sqrt{8}-4\sqrt{32}+2\sqrt{50}$ b) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[6]{25}-\sqrt[9]{5^{12}}$ c) $2\sqrt{75}-3\sqrt{125}+\sqrt{150}$

Solución:

Como habrás observado estos radicales no parecen ser semejantes por lo que es necesario simplificar previamente cada sumando, antes de reducir los radicales semejantes, veamos:

a) $10\sqrt{8}-4\sqrt{32}+2\sqrt{50} = 10\sqrt{4\bullet 2}-4\sqrt{16\bullet 2}+2\sqrt{25\bullet 2}$

$= 20\sqrt{2}-16\sqrt{2}+10\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

b) $4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[6]{25}-\sqrt[9]{5^{12}} = 4\sqrt[3]{5}+2^{3\bullet 2}\sqrt[6]{5^2}-\sqrt[9]{5^9\bullet 5^3}$

$= 4\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}$

Ejercicios propuestos:

1. Calcular las siguientes operaciones con radicales.

a) $13\sqrt{7}-5\sqrt{7}+2\sqrt{7}$ b) $6\sqrt[7]{x}+2\sqrt[7]{x}-\sqrt[7]{x}+5\sqrt[7]{x}-9\sqrt[7]{x}$

c) $3\sqrt{45}-2\sqrt{20}+\sqrt{80}$ c) $2\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-4\sqrt[3]{3}$

1.4.3. Multiplicación y división de radicales

En la multiplicación y división de radicales es necesario que los radicales tengan un mismo índice para poder aplicar las propiedades correspondientes a los radicales tal y como se muestra en el cuadro de las propiedades, o sea en la práctica diferenciamos dos casos:

1er caso: Los radicales tienen igual índice (Se aplica directamente la propiedad).

2er caso: Los radicales tienen diferentes índices. (Se llevan a un mismo índice y luego se aplica la propiedad como en el primer caso).

Ejercicios resueltos:

Efectúa las operaciones siguientes:

a) $4\sqrt{3}\bullet 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{24}\div\sqrt[3]{3}$ c) $\left(8\sqrt{x}-5\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x}+4\sqrt{y}\right)$

d) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}}$ $(x>0; y\geq 0)$

Solución:

a) $4\sqrt{3} \bullet 5\sqrt{2} = 20\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{24} \div \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} = 2$

c) $\left(8\sqrt{x} - 5\sqrt{y}\right)\left(3\sqrt{x} + 4\sqrt{y}\right) = 24\sqrt{x^2} + 32\sqrt{xy} - 15\sqrt{xy} - 20\sqrt{y^2}$

$= 24x + 17\sqrt{xy} - 20y$

d) $\dfrac{\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[6]{x^3y^3}}{\sqrt[6]{x^2}} = \sqrt[6]{\dfrac{x^3y^3}{x^2}} = \sqrt[6]{xy^3}$

Otro elemento importante en el trabajo con los radicales lo constituye la **Racionalización de denominadores** el cual responde a la simplificación de radicales, ya que recordarás que en la misma establecimos entre sus pasos que en las fracciones no deben aparecer raíces en los denominadores, recordemos los casos que pueden aparecer:

Primer caso: Con una raíz en el denominador

Ejercicios resueltos:

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{x-y}{2x\sqrt{x-y}}$

Solución:

a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 \bullet \sqrt{2}}{\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}}$ (se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{2}$ para eliminar el radical del denominador).

$= \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{1 \bullet \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3} \bullet \sqrt[3]{3^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$

c) $\dfrac{x-y}{2x\sqrt{x-y}} = \dfrac{(x-y) \bullet \sqrt{x-y}}{2x\sqrt{x-y} \bullet \sqrt{x-y}} = \dfrac{(x-y) \bullet \sqrt{x-y}}{2x(x-y)} = \dfrac{\sqrt{x-y}}{2x}$

Segundo caso: Con un binomio que contiene al menos una raíz en el denominador.

Para trabajar con este caso es necesario que recuerdes que las expresiones $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ y $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ (a, b > 0) se llaman conjugadas. Por lo tanto, si un denominador se multiplica por la conjugada se eliminan los denominadores.

Ejercicios resueltos:

Racionaliza las expresiones siguientes:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}$ c) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

Solución: Para darle solución a los ejercicios propuestos primeramente debemos buscar la conjugada del denominador y multiplicar tanto el numerador como el denominador por dicha conjugada

a) $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{3-4}=\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+2\right)}{-1}=-\sqrt{15}-2\sqrt{5}$

c) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)\bullet\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\frac{(x-y)\bullet\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{(x-y)}=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$

Ejercicios propuestos:

1. Efectúa las siguientes operaciones considerando que las variables son siempre positivas:

   a) $0{,}8\sqrt[5]{5}\bullet 5\sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt{ab}\bullet\sqrt{bc}\bullet\sqrt{ac}$ c) $\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)$ d) $\sqrt[3]{88}\div\sqrt[3]{11}$

   e) $\sqrt[3]{x^4y}:\sqrt[3]{xy^{-4}}$ f) $\frac{\sqrt{2}\bullet\sqrt{3}\bullet\sqrt{7}\bullet\sqrt{5}}{\sqrt{35}}$

2. Racionaliza las siguientes expresiones considere las variables siempre positivas:

   a) $\frac{5}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3x}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ (| b| <a)

3. Calcular:

   a) $\sqrt{75}-2\sqrt{12}+\frac{6}{\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{5}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{32}-\frac{10}{\sqrt{5}}+\sqrt{45}$

   c) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)$

1.5 Logaritmos

Definición de logaritmo de base a (a ≠ 0, a ≠ 1). Identidad fundamental logarítmica. Cálculo de logaritmos aplicando la definición. Propiedades de los logaritmos.

1.5.1. Definición de logaritmo

Dados dos números reales a y b (a>0; a≠1; b>0) se llama logaritmo en base a de b y se denota $\log_a b$ al número x que satisface la ecuación $a^x = b$.

$$\log_a b = x \quad \textbf{Si y solo si} \quad a^x = b$$

1.5.2. Propiedades de los logaritmos

Si a>0, b>0 y c>0 tal que a≠1 y c≠1 entonces se cumple:

Tabla 3: Propiedades de los logaritmos

a) $\log_a a = 1$ b) $\log_a 1 = 0$ c) $a^{\log_a b} = b$

d) $\log_a (A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$ e) $\log_a (A : B) = \log_a A - \log_a B$

f) $\log_a b^x = x \cdot \log_a b$ g) $\log_a c \cdot \log_c b = \log_a b$ h) $\log_{a^x} b = \frac{1}{x}\log_a b$ (x≠0)

Ejercicios resueltos:

1. Hallar $\log x$, siendo $x = \dfrac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}$

Solución:

Aplicando las propiedades de los logaritmos vistas anteriormente y sustituyendo x obtenemos que:

$$\log\frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}} = \log(ab^3) - \log(c\sqrt[3]{d^2}) = \log a + \log b^3 - \left(\log c + \log\sqrt[3]{d^2}\right)$$

$$= \log a + 3\log b - (\log c + \frac{2}{3}\log d)$$

$$= \log a + 3\log b - \log c - \frac{2}{3}\log d$$

2. Sabiendo que: $\log_{10} 2 \approx 0{,}3010$ y que $\log_{10} 3 \approx 0{,}4771$. Hallar $\log_{10}\sqrt[5]{12}$

Solución:

Tenemos que:
$$\log_{10}\sqrt[5]{12} = \frac{1}{5}\log_{10} 12 = \frac{1}{5}\log_{10} 2^2 \bullet 3 = \frac{1}{5}\left(2\log_{10} 2 + \log_{10} 3\right)$$

$$\approx \frac{1}{5}\left(2 \bullet 0{,}3010 + 0{,}4771\right) \approx 0{,}216$$

Ejercicios propuestos:

1. Dado: $\log y = 3\log(a-b) + \frac{1}{3}\log c - \frac{1}{5}\left[2\log(a+b) + 3\log d\right]$. Hallar el valor de y.

2. Sabiendo que:

   a) $x = \frac{\sqrt[5]{a(b-c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Hallar logx

   b) $\log 4 \approx 0{,}6021$ y que $\log 5 \approx 0{,}6990$.Hallar el valor de $\log\sqrt[4]{80}$

1.6 Estadística Descriptiva

Para el desarrollo de esta temática se tendrá en cuenta el estudio realizado del tema en el bachillerato, destacando lo siguiente:

La **Estadística** es la ciencia que proporciona los métodos para obtener, organizar, clasificar, resumir, presentar y analizar datos relativos a un conjunto de individuos u observaciones. Esto permite extraer conclusiones válidas y tomar decisiones lógicas basadas en dicho análisis.

Población: Es el conjunto de todos los elementos cuyo conocimiento interesa. Cada uno de los elementos del conjunto se llama individuo.

Muestra: Es un subconjunto de la población que se quiere estudiar.

Ejemplo 1

De una escuela de 970 alumnos se han elegido, de manera aleatoria 200 para realizar un estudio relacionado con el número de hermanos.

Población: 970 alumnos.

Muestra: 200 alumnos elegidos

n = 200 (tamaño de la muestra)

Número de hermanos	Cantidad de alumnos
0	9
1	53
2	63
3	46
4	21
5	4
6	3
+6	1

Tabla 4: De frecuencia

X_i	0	1	2	3	4	5	6	+6
F_i	9	53	63	46	21	4	3	1

Variable: Característica o propiedad que es observada o estudiada en una población.

1.6.1 Tipos de variables

- **Cualitativas**
- **Cuantitativas** { Discretas / Continuas

Variables cualitativas

Se refieren a características que no se pueden cuantificar. Ejemplos:

- El sexo de un grupo de personas.
- El rendimiento académico (dado en alto, medio y bajo)
- Los colores de las flores.
- Preferencias por los tipos de música.

Variables cuantitativas

Cuando pueden ser medidas numéricamente. Ejemplos:

- La edad
- El rendimiento académico (medido en puntos)
- Cantidad de población
- Cantidad de problemas de Matemática resueltos.

- **Discretas:** Cuando solo pueden tomar un número finito o a lo sumo numerable de valores.

Ejemplos:

- Número de alumnos de un grado.
- Número de hijos.
- Cantidad de libros de una biblioteca.
- Número de viajes dados por un ómnibus.

- **Continuas**: Cuando pueden tomar todos los valores de un intervalo de números reales.

  Ejemplos:

  - Estatura de un grupo de personas.
  - Cantidad de lluvia caída en una región en una época dada en función del tiempo.
  - Volumen de agua en una presa en metros cúbicos.
  -

1.6.2. Escalas de medición de la variable

- Nominal
- Ordinal
- De intervalos
- De razones

Escala nominal: La variable que se mide se puede dividir en categorías o clases mutuamente excluyentes y exhaustivas que cumplen las siguientes propiedades:

- La igualdad se obtiene entre elementos de una misma categoría o clase.
- La desigualdad se obtiene entre elementos de clases diferentes.
- No existe una relación de orden entre los elementos ni entre las clases.
- La variable no toma valores numéricos.

Ejemplo:

Clasificación de los 30 alumnos de un grupo de primer semestre de acuerdo con el sexo.

SEXO	NÚMERO DE ALUMNOS
MASCULINO	11
FEMENINO	19
TOTAL	30

Escala ordinal: La variable que se mide se puede dividir en categorías o clases mutuamente excluyentes y exhaustivas que cumplen las siguientes propiedades:

- La igualdad se obtiene entre elementos de una misma categoría o clase.
- La desigualdad se obtiene entre elementos de clases diferentes.
- Existe una relación de orden entre los elementos de dos clases diferentes.
- La variable no toma valores numéricos.

Escala de intervalos:- La variable que se mide se puede dividir en categorías o clases mutuamente excluyentes y exhaustivas que cumplen las siguientes propiedades:

- Relación de orden bien definida entre las clases.
- La distancia o diferencia entre las clases o categorías consecutivas es la misma.
- Existe una unidad de medida común para todas las categorías.
- El valor cero no es absoluto (no significa ausencia del atributo que se mide)

Escala de razones: La variable que se mide se puede dividir en categorías o clases mutuamente excluyentes y exhaustivas que cumplen las siguientes propiedades:

- Relación de orden bien definida entre las clases.
- La razón entre valores de la variable adquiere significado.
- Existe una unidad de medida común para todas las categorías.
- El valor cero es absoluto, indica la ausencia total del atributo que se mide.

ESCALAS “no métricas": NOMINAL Y ORDINAL

Los números utilizados no se acompañan de una unidad de medida.

ESCALAS “métricas": De INTERVALOS Y DE RAZONES

Están caracterizadas por una unidad de medida común para todas las categorías.

1.6.3. Frecuencias

La *frecuencia absoluta* (F*i*) de un dato cuantitativo es el número de veces que aparece este dato en la muestra.

La *frecuencia relativa* (*f i*) es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra.

La *frecuencia absoluta acumulada* (Fa_i) de un dato cuantitativo es el número de veces u observaciones que se tiene hasta un determinado valor

La *frecuencia relativa acumulada* (fa_i) es el cociente entre la frecuencia absoluta acumulada y el tamaño de la muestra hasta un determinado valor.

1.6.4. Lectura e interpretación de informaciones

La recopilación, el procesamiento y el análisis de datos cada vez tienen mayor uso. El desarrollo de la técnica y de las comunicaciones permite acceder a bancos de datos sobre diversos asuntos y usarlos para valorar, estimar, predecir, adoptar decisiones, etc.

Las informaciones, generalmente, se nos presentan en tablas, pictogramas y gráficos (de barras, circulares o poligonales).

El conjunto que nos sirve de fuente de información de un asunto dado se llama universo o población.

Una muestra es un subconjunto de la población. Esta debe ser cuidadosamente seleccionada para que sea representativa de la característica que se desea estudiar. El número de elementos de la muestra es el tamaño de esta.

La frecuencia absoluta de un dato cuantitativo es el número de veces que aparece este dato en la muestra. La suma de las frecuencias absolutas es igual al tamaño de la muestra. El cociente entre la frecuencia absoluta de un valor muestra y el tamaño de la muestra se llama frecuencia relativa. La suma de las frecuencias relativas es igual a 1,00 (o 100% si se trata de frecuencias relativas en %).

Ejemplo

A continuación, aparece de diferentes formas, la información sobre una encuesta en una escuela de 720 alumnos con relación al tipo de programa de televisión que más prefieren.

TABLA

PROG.	TOTAL	H	V
Deportivos	210	90	120
Musicales	210	120	90
Infantiles	60	30	30
Noticieros	150	60	90
Culturales	90	45	45

PICTOGRAMA

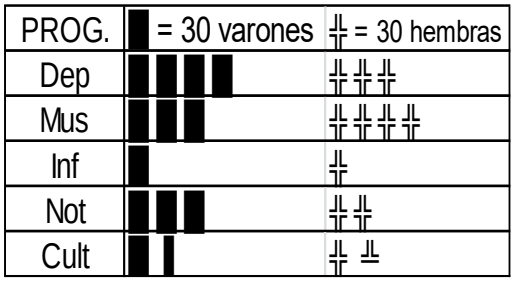


Gráfico de barras

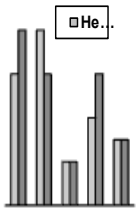


Figura 18: Representación gráfico de barras

Programa Gráfico circular

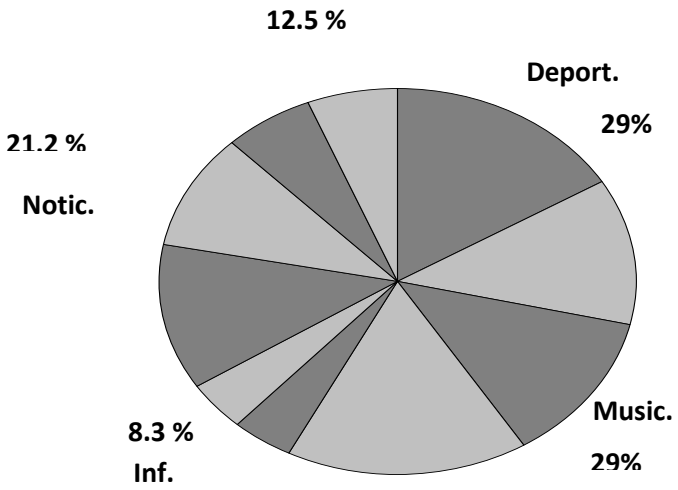


Figura 19: **Representación gráfico de barras.**

Gráfico poligonal

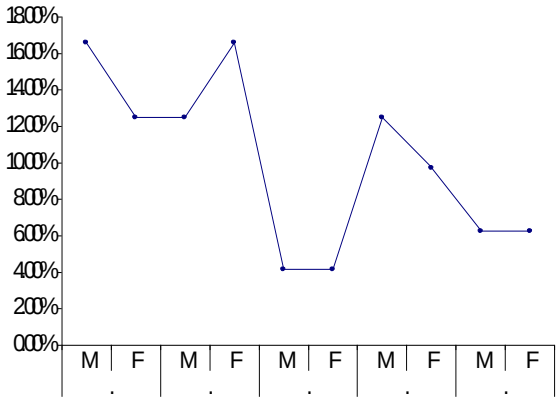


Figura 20: Representación gráfico de poligonal

Programas DEP MUS INF NOT CULT.

a) ¿Qué programación prefieren los varones?

b) ¿Cuál es la menos preferida por las hembras?

c) ¿Qué porcentaje de las hembras prefieren los infantiles?

d) Si la matrícula de la escuela hubiera sido de 2160 alumnos ¿cuál sería la población y cuál el tamaño de la muestra?

e) Calcula la frecuencia absoluta y relativa de los alumnos que prefieren programas infantiles.

Resolución:

a) Observando la columna (V) se deduce que el mayor número de ellos prefieren los programas deportivos.

b) Según la columna (H) se deduce que las hembras prefieren ver menos los programas infantiles.

c) Total de hembras: 345; $\frac{30 \bullet 100}{45} = 8{,}7\%$

d) La población es el total (Universo); en este caso: 2160

El tamaño de la muestra se obtiene sumando la primera columna: 720

e) F.A.= 60 total de estudiantes que prefieren los infantiles

F.R.= $\frac{60}{720} = \frac{1}{12}$

1.6.5. Medidas de tendencia central

La **Media Aritmética (o promedio)** es el valor alrededor del cual se encuentran los datos de una lista. La media de una lista de datos se halla haciendo la suma de todos los datos y dividiendo esta por el número de datos sumados.

La moda es el valor más común dentro de una lista de datos. Es el valor que más se repite. En ocasiones una lista de datos puede tener más de una moda cuando son varios los datos que más se repiten (y se repiten la misma cantidad de veces).

La mediana de un grupo de datos *ordenados* es el valor central de la lista si esta tiene un número impar de datos o el promedio de los datos centrales si tiene un número par de datos.

Ejemplo

Los siguientes números representan la cantidad de hermanos que tienen 9 de los estudiantes de una escuela: 2 , 4, 0 , 4 , 7 , 2 , 1 , 5 , 2

a) ¿Cuál es el promedio de hermanos de esos 9 estudiantes?

b) ¿Cuál es la moda y la mediana del número de hermanos?

c) Si se agrega otro estudiante que tiene 7 hermanos, ¿cuál es ahora la mediana del número de hermanos?

d) Haga una tabla de frecuencia absoluta y frecuencia relativa del número de hermanos.

Resolución:

a) media

b) moda: 2 ; lista ord: 012224457 ; mediana = 2

c) lista ord: 0122244577; mediana = $\frac{2+4}{2}=3$

d)

NO. HNOS.	0	1	2	4	5	7
F. A.	1	1	3	2	1	1
F. R.	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

En la segunda fila (F.A.) aparecen las cantidades de estudiantes correspondientes a cada valor muestral (número de hermanos) y en la tercera, la frecuencia relativa (cociente entre F.A. y el tamaño de la muestra)

Ejercicios propuestos

1 – La tabla de frecuencia siguiente muestra la puntualidad diaria de los obreros de un taller durante 19 días.

No. de obreros que llegaron tarde	0	1	2	3	4	5	6	7
Frec. Absoluta	2	2	3	2	2	6	1	1

a). Calcule la media, la moda y la mediana de las impuntualidades diarias.

b). Halle la frecuencia relativa para 4 impuntualidades diarias.

2 – Se lanza un dado 19 veces con las siguientes lecturas:

5 , 1 , 3 , 3 , 6 , 2 , 6 , 4 , 5 , 2 , 1 , 2 , 5 , 3 , 2 , 6 , 1 , 4 , 4

a). Calcule el promedio, la moda y la mediana de las lecturas.

b). Calcule la frecuencia absoluta y relativa de la lectura 3.

c). Construye la tabla de frecuencias.

d). ¿Qué tanto por ciento de los encuestados se dedican al comercio?

3 – Una familia campesina dispone de 50 hectómetros cuadrados de superficie cultivable de las cuales 25 están destinadas al plátano; 10 a patatas; y 5 al maíz. El resto de la tierra está roturándose. Haz un gráfico circular para la distribución de las tierras.

Nota: Determina exactamente el arco del sector circular de cada parte.

4 – En un aula del Curso de Iniciación Universitaria la preferencia de los estudiantes para continuar estudios universitarios es la siguiente:

Especialidad	Medicina	Ciencias Exactas	Ciencias Técnicas	Lic. en deporte	Otras
F. Abs	9	6		7	
F. Relat		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{10}$

a). ¿Cuántos estudiantes son? Completa la tabla.

b). Ilustre mediante gráficos de barras, circular y poligonal.

5 – La superficie terrestre está distribuida del modo siguiente:

Regiones	km^2 (miles)
África	30 000
América	42 000
Antártica	13 000
Asia	44 000
Australia y Oceanía	9 000
Europa	10 000

a) Representa la distribución en un gráfico de barras

b) ¿Qué porcentaje de la superficie terrestre está en América?

6 – Hallar la moda, la media y la mediana de la lista de datos siguiente:

150, 100, 115, 115, 150, 120, 130, 110, 115, 180, 100

7 – Una empresa productora de calzado de hombre realizó una encuesta en relación con las tallas de calzado en una zona donde ubicarán un centro para la venta. Los resultados son los siguientes:

Tallas	A	B	C	D	E	F
Frecuencia	100	175	350	200	100	25

a) ¿Qué tanto por ciento del total de zapatos de esas tallas que se ubiquen en la peletería deben ser de la talla E?

8 – Tabla de los resultados en la primera evaluación de Matemática, español e Historia en un aula.

Calificación de 0 a 10 pts.		5	6	7	8	9	10
Frecuencia	Mat.	1	1	6	12	7	3
	Esp.	0	2	4	12	8	4
	Hist.	0	1	4	6	15	4

a) ¿En qué asignatura la nota promedio fue mayor?

b) ¿Cuál fue la moda de las notas en cada asignatura?

c) Calcule la mediana de las notas en cada asignatura.

d) Calcule la frecuencia relativa de la nota 7 en Matemática.

e) Según los resultados anteriores haga su valoración de esta primera evaluación en esa aula.

9 –Con relación a la estatura de los jugadores en un torneo de baloncesto se tienen los siguientes datos de la muestra tomada.

Estatura (metros)	Frec. Abs.	Frec. Rel.
Menos de 1.90	24	
1.90	18	$\frac{3}{8}$
Más de 1.90		

a) Completa la tabla.

b) Si la muestra abarcó al 75% del total de jugadores. ¿Cuántos participaron en el torneo?

c) Si los encuestados con más de 1.90 m tenían toda una estatura inferior a 2.05 m. ¿Cuál será la mayor estatura promedio posible de la muestra?

Respuestas de los Ejercicios

1. a) $\frac{59}{19} = 3{,}4 \; ; \; 2 \; y \; 2$ b) $\frac{2}{19}$

2. a) 3,4 ; 2 y 3 b) F. A =3; F. R = $\frac{3}{19}$

3. a) SP: 3 ; I: 9 ; C: 3 ; E: 5 ; A: 12 b) 9,4%

4. Plátano: 180º ; Patatas: 72º ; Maíz: 36º ; resto: 72º

5. a) 30 estudiantes

7. 125,9; 115; 115.

8. 2,6 %

9. a) H: 8,57 pts. b) M y E:8, H: 12 c) M y E :8, H:15 d) 1/5

10. b) 64 c) 1,91.

CAPÍTULO 2. TRABAJO ALGEBRAICO

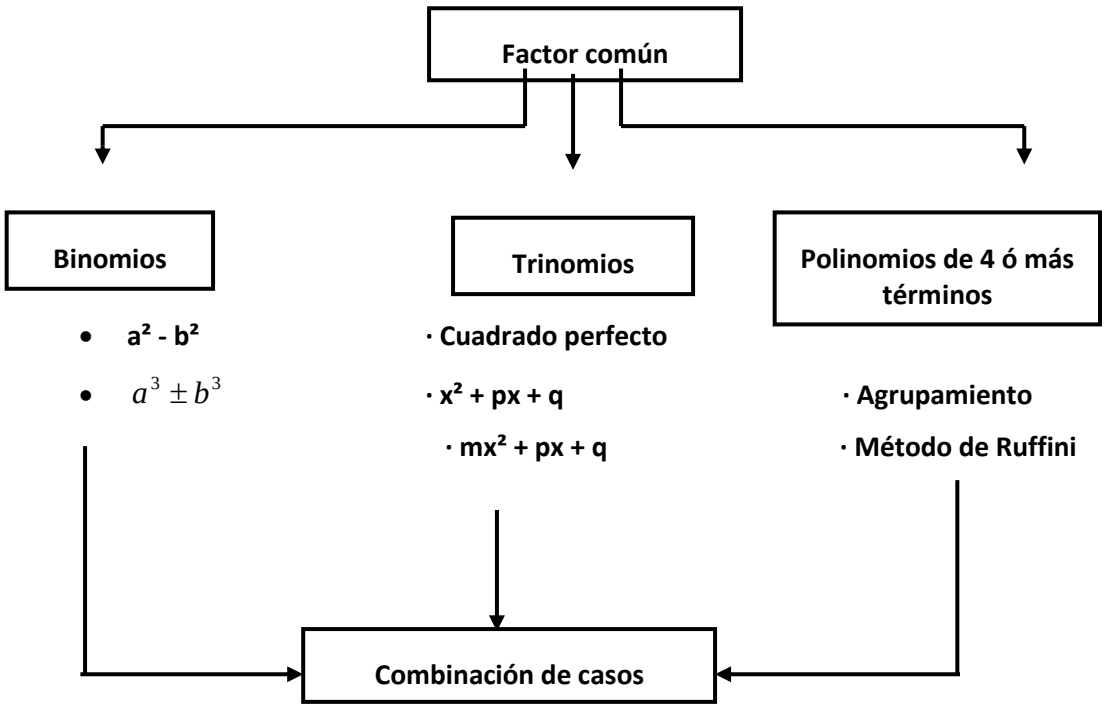
2.1 Operaciones con polinomios

- Con los términos se efectúan las mismas operaciones ya estudiadas con los números racionales y se cumplen las mismas propiedades. Los términos semejantes se reducen operando con los coeficientes y manteniendo la parte literal.
- Las multiplicaciones pueden abreviarse si se utilizan los llamados productos notables:

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$		$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Descomposición factorial.

El esquema siguiente te resume el orden en que debes proceder para descomponer en factores:



Determinar mínimo común múltiplo (m.c.m)

- Descomponer las expresiones.
- Determinar los factores comunes y no comunes.
- Multiplicar los factores comunes de mayor exponente y los no comunes.

Determinar máximo común divisor (m.c.d)

- Descomponer las expresiones.
- Determinar los factores comunes.
- Multiplicar los factores comunes de menores exponentes.

Ejercicios resueltos:

1. Al calcular $2a^2 + 3a$ se obtiene:

___ $5a^2$ ___ $5a^3$

___ $a(2a + 3)$ ___ Ninguna de las anteriores.

2. La expresión $2a^3 – 4a^2 + 2a$ es equivalente a:

___ $2(a^3 – 2a^2 + a)$ ___ $2a(a^2 – 2a + 1)$

___ $a(2a^2 – 4a + 2)$ ___ $2a(a^2 - 2a)$

3. La expresión $4a^2b - 2a^2b^2 + 6b^3$ se convierte extrayendo factor común en:

___$ab(4a – 2ab + 6b^2)$ ___$2ab(2a^2 - a^2b + 3b^2)$

___ $6ab(-2a^2 + 4a^2b + b^2)$ ___$2a^2b^2\left(\frac{2}{b} - 1 + \frac{3b}{a^2}\right)$

- Rudy plantea que la siguiente expresión $25x^2 – 10xy + 4y^2$, se expresa como producto así: $(5x – 2y)^2$. ¿Estás de acuerdo con Rudy? Fundamenta tu respuesta.

- Expresa como producto:

1) $14x^2y^2 – 28x^3 + 56x^4$ 2) $81 – y^2$

3) $ay^2 - 10ay + 25a$

4) $mx^2+9mx+20m$

5) $\frac{x^2}{4}+x+1$

6) $2a^2 - 8$

7) $55m^2n^3x + 110\ m^2n^3x^2 - 220m^2g^2$

8) $(a - b) + (a - b)r$

9) $m^2 + 28m - 165$

10) $3a\ (p - q) + 2p - 2q$

11) $mx^2 + 9xm + 20m$

12) $6x^2 - 11ax - 7a^2$

13) $\frac{2}{3}ah^2 - \frac{2}{3}ah - a$

14) $4x^3y + 10x^2y^2 - 24xy^3$

15) $\frac{1}{4}(a - b)^2 - (a - b)^2$

16) $y^2 + 40x + 25$

17) $\frac{1}{36}u^2 - v^4$

18) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

19) $8x^3 - 27$

20) $a^3 + 64$

Solución:

Ejercicio 1: Repuesta correcta __X_ a (2a + 3)

Ejercicio 2: Repuesta correcta __X_ 2a ($a^2 - 2a + 1$)

Ejercicio 3: Repuesta correcta __X_ $2a^2b^2\left(\frac{2}{b}-1+\frac{3b}{a^2}\right)$

Ejercicio 4: Si estoy de acuerdo con Rudy, ya que $((5x - 2y)^2 = 25x^2 - 10xy + 4y^2$

Ejercicios propuestos:

1. Expresa como producto:

1) $4x\ (m - n) + n - m$

2) $p^2 - 49q^2$

3) $x^2 - 36$

4) $100t - 4ta^2$

5) $2h^2 - 2h - 3$

6) $x^2 - 7xy + 10y^2$

7) $\frac{6}{5}xy^4 - \frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}x$

8) $y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$

i. Sean los polinomios:

$A = 2x^3 - x^2 + 11x - 20$

$B = (x^2 - 2x + 4)(x + 2)$

$C = (2x - 3)^2 - (x + 2)(x - 2)$

$D = -5/2p - [-(2s - 4p) + (-3s + 4p)]$

Calcula:

a) $A + B - C$ b) $A - C + 3B$ c) D^2

ii. Descomponer en factores:

a) $24 m^2 n^3 - 12 m^4 n^2 + 6 m^5 n^2$

b) $4y^2 - 25$

c) $a^{4n} + a^{2n}$

d) $x^{6n} - 1$

e) $am - bm - a + b$

f) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

g) $x^3 + 2x^2 - 48x$

h) $3x^2 + 7x - 20$

iii. Expresa las sumas siguientes como un producto:

a) $81x^4 - 72x^2 + 16$

b) $a^2 b^3 - 9b^3 - 8a^2 + 72$ (*)

e) $x^3 - 7x^2 + 6$

c) $8x^3 + 216$

d) $4b^4 + 3b^2 y^2 + y^4$ (*)

f) $x^3 + 5x^2 - 4x - 20$

iv. El trinomio $A = 3x^2 + 11x - 20$, $(x > 9/2)$ representa el área de un rectángulo, en dm^2:

a) Determina la expresión P que representa su perímetro.

b) Calcula el perímetro si $x = 5{,}8$ y si $x = -4$

c) Determine el dominio de valores de la expresión A.

2.2 Fracciones algebraicas

Concepto de fracción algebraica. Cambios de signos en una fracción que garantizan que su valor permanezca invariante. Simplificación de fracciones algebraicas. Multiplicación y división de fracciones algebraicas. Adición y sustracción de fracciones algebraicas. Operaciones combinadas con fracciones algebraicas.

1. Simplificar fracciones algebraicas

- Para simplificar factores se procede como en la aritmética. Si los términos no están descompuestos en factores, para poder simplificar, primero debe realizarse dicha descomposición.
- Para realizar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división con cocientes se utilizan las mismas reglas ya conocidas para operar con números fraccionarios.

2. Multiplicar o dividir fracciones algebraicas

- El procedimiento que se utiliza para multiplicar o dividir fracciones algebraicas es el mismo que ya conoces para multiplicar o dividir fracciones comunes. Si tenemos dos fracciones algebraica $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ entonces:

a) $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$ (B, D $\neq$ 0) b) $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}$ (B, C, D $\neq$ 0)

3. Sumar o sustraer fracciones algebraicas

- Descomponer los denominadores.
- Determinar el m.c.m. de los denominadores.
- Ampliar todas las fracciones a un denominador común (Dividir el m.c.m. por los denominadores y el resultado multiplicarlo por los numeradores).
- Reducir términos semejantes en el numerador.
- Simplificar el resultado si es posible.

Ejercicios resueltos: Ejercicios correspondientes a pruebas de ingresos de diferentes cursos escolares.

1. Dados:

$M = 9x^2 + 12x + 4$ $\quad P = 6x^2 + x - 2$ $\quad R = 3x(a-b) + a - b$

$N = 3x^3 + 2x^2$ $\quad Q = 4x^2 - 1$

a) Descomponga en factores cada una de las expresiones dadas.

b) Calcule y simplifique: $(2x^2/N - 1/M): Q/P$

Solución:

a) $M = 9x^2 + 12x + 4 = (3x+2)^2$ $\quad P = 6x^2 + x - 2 = (3x+2)(2x-1)$

$R = 3x(a-b) + a - b = (a-b)(3x+1)$; $\quad N = 3x^3 + 2x^2 = x^2(3x+2)$

$Q = 4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1)$

b) $(2x^2/N - 1/M) : Q/P = \left(\frac{2x^2}{N} - \frac{1}{M}\right) \div \frac{Q}{P} = \left(\frac{2x^2}{3x^3+2x^2} - \frac{1}{9x^2+12x+4}\right) \div \frac{4x^2-1}{6x^2+x-2}$

$$= \left(\frac{2x^2}{x^2(3x+2)} - \frac{1}{(3x+2)^2}\right) \bullet \frac{(3x+2)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \left(\frac{2x^2(3x+2) - x^2}{x^2(3x+2)^2}\right) \bullet \frac{(3x+2)}{(2x+1)}$$

$$= \left(\frac{6x^3 + 4x^2 - x^2}{x^2(3x+2)^2}\right) \bullet \frac{3x+2}{2x+1} = \left(\frac{6x^3 + 3x^2}{x^2(3x+2)^2}\right) \bullet \frac{3x+2}{2x+1} = \left(\frac{3x^2(2x+1)}{x^2(3x+2)^2}\right) \bullet \frac{3x+2}{2x+1}$$

Al simplificar se obtiene: $\frac{3}{3x+2}$

2. Compruebe que:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{3x+1}{x-4}$$

Si $A = 9x^2 - 1$ $\quad B = x^2 + x - 20$ $\quad C = 3x^2 + 14x - 5$ $\quad D = x^2 + 10x + 25$

Solución:

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \bullet \frac{D}{C} = \frac{9x^2-1}{x^2+x-20} \bullet \frac{x^2+10x+25}{3x^2+14x-5} = \frac{(3x+1)(3x-1)}{(x+5)(x-4)} \bullet \frac{(x+5)^2}{(3x-1)(x+5)} = \frac{3x+1}{x-4}$$

l.q.q.d.

3. Dados: $A = \dfrac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 36}$ $B = \dfrac{x^2 + 12x + 36}{4x^2 + 6x}$

a) Calcule y simplifique **A. B**

b) Halle el valor de **x** para el cual el valor numérico del resultado del Inciso a) es **-1.**

Solución:

a) $A \bullet B = \dfrac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 36} \bullet \dfrac{x^2 + 12x + 36}{4x^2 + 6x} = \dfrac{(2x+3)(x-6)}{(x+6)(x-6)} \bullet \dfrac{(x+6)^2}{2x(2x+3)} = \dfrac{x+6}{2x}$

b) $\dfrac{x+6}{2x} = -1 / \bullet 2x$

$x + 6 = -2x$

De donde se obtiene que: 3x = -6, o sea que: x = - 2

4. Sean: $A = \dfrac{2x^2 + 11x + 5}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}$ y $B = x^2 - 4$

Verifica que la expresión **A. B + x²** se hace cero para un único valor de **x**

Solución:

$A \bullet B + x^2 = \dfrac{2x^2 + 11x + 5}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20} \bullet (x^2 - 4) + x^2 = \dfrac{(2x+1)(x+5)}{(x+2)(x-2)(x+5)} \bullet (x+2)(x-2) + x^2$; Al simplificar esta expresión se obtiene: 2x+1+x² y al comprobar para que valor de x esta expresión se hace cero se resuelve la ecuación: x² + 2x + 1 = 0; (x + 1)² = 0, la cual se hace cero para el único valor x = -1

Ejercicios propuestos:

1. Dados:

$A = 49x^2 - 9$ $B = 7x^2 - 3x$ $C = 7x^2 + 32x - 15$

$D = x^2 + 8x + 15$ $E = x^3 + 4x^2 - 19x + 14$

a) Descomponga completamente en factores cada una de las expresiones anteriores.

b) Calcula y simplifica (1/B - 6/A) . C/D

2. Calcula:

a) $\dfrac{3x^2 - 11x}{x^3 - 8} - \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x + 4}$

b) T = A + B . C, si $A = \frac{x^2}{x^2-8x+16}$, $B = \frac{9-4x^2}{2x-3}$ y $C = \frac{x^2+x}{2x^3-3x^2-17x-12}$

2. De las opciones dadas, solo una es la correcta, señálala. Si es necesario realizar cálculos, déjalo en la hoja:

2.1- Si se toma 1/3, después 2/5 y luego 2/15 de la unidad.

La parte que queda es:

A) 18/23 B) 2/15 C) 13/15 D) ninguna

2.2- La novena de la potencia 3^{10} es:

A) 3^9 B) 9^4 C) 3^{12} D) 9^{11}

2.3- El resultado de simplificar la fracción F = $\frac{x^2+x-6}{3x^2-6x}$, es:

A) $\frac{x+3}{3x}$ B) $\frac{x-6}{3-6x}$ C) $\frac{x-3}{3-6x}$ D) $\frac{x^2+x}{3x^2-x}$

2.4 Un ciclista recorre 54 Km. en 3horas, si le faltan por recorrer 72 Km. ¿Qué tiempo durará el recorrido total?

A) (4h B)1,28 h C) 420 min. D) 2 268h

3. Sean las expresiones: $M = \frac{x^3-7x+6}{x^3+8}$; $N = \frac{x^3-9}{x^2-2x+4}$; $P = \frac{2x-2}{x-1}$;

Hallar la expresión Q tal que: Q = M: N + P

4. Dadas las expresiones algebraicas siguientes:

$$A = \frac{a+5}{a^3-2a^2+2a-4};\quad B = \frac{a^2-3}{12+4a^2-a^4};\quad C = \frac{a-4}{a^3-2a^2-6a+1}$$

Hallar la expresión D tal que: D = A – B – C

5. Sean las expresiones: $O = \frac{1}{x-1}$, $S = \frac{1}{x^2+x-2}$, $A = \frac{x+1}{x^3+4x^2+x-6}$,

Hallar la expresión R, tal que: R = O + S + A

6. Efectúa las operaciones siguientes:

$$\frac{y+2}{2x} - \frac{y^4+6y^2+9}{y^3-y^2+3y-3} : \frac{2xy^2+6x}{y^2-1-2xy+2x}$$

CAPÍTULO 3. ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

3.1 Ecuaciones e inecuaciones

Resolver ecuaciones lineales

- Agrupar los términos que contienen variables en un miembro y los números en el otro.
- Reducir términos semejantes.
- Despejar la variable y obtener su valor.
- Comprobar.
- Plantear el conjunto solución.

Resolver ecuaciones cuadráticas

- Igualar a cero. (Transponer todos los términos a un mismo miembro)
- Reducir términos semejantes.
- Descomponer en factores.
- Igualar a cero cada factor.
- Despejar en cada caso y obtener el valor de la variable.
- Comprobar.
- Plantear el conjunto solución.
- Cuando tengas que resolver una ecuación cuadrática, después de expresada en la forma
- $ax^2 + bx + c = 0$ (a≠0), si vas a utilizar la fórmula puedes seguir el algoritmo siguiente:
- Identifica los coeficientes a, b y c.
- Sustituye los valores en la fórmula del discriminante $D = b^2 - 4ac$.

  - Si D < 0, entonces no posee soluciones reales.
  - Si D = 0, entonces posee una sola solución $x = -\frac{b}{2a}$
  - Si D > 0, entonces posee dos soluciones $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Resolver ecuaciones fraccionarias

- Descomponer denominadores.
- Buscar m.c.m. de los denominadores.

- Eliminar denominadores multiplicando cada término de la ecuación por el m.c.m. y simplificando.
- Resolver la ecuación que se obtenga.
- Comprobar (Obligatorio).
- Plantear conjunto solución.

Ejercicios propuestos:

1. Marca con una cruz la proposición verdadera. Fundamenta las falsas:

1) ____ La ecuación $4a^3 - a^2 = 5a$ es equivalente a la ecuación $(4a - 5)(a + 1)=0$ en el dominio de los números reales.

2) ____La ecuación $\frac{(4a-5)^2(a+1)}{4a-5} = 0$; es equivalente a la ecuación $(4a - 5)(a + 1)=0$ en el dominio de los números reales.

3) ____ La ecuación (a – 1)2 + (a – 1) – (5 – 3a2) = 0 no es equivalente a la ecuación 4a2 – a + 5 = 0 en el dominio de los números reales.

2. Marca con una cruz la proposición verdadera. Fundamenta las falsas:

1) ___ Si el discriminante de una ecuación cuadrática es mayor que cero, entonces la ecuación tiene exclusivamente soluciones racionales.

2) ___Si el discriminante de una ecuación cuadrática es igual a cero, entonces la ecuación cuadrática tiene una única solución.

3) ____Si el discriminante de una ecuación cuadrática es menor que cero, entonces la ecuación cuadrática tiene soluciones irracionales.

3. Sea la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c = 0$ ($a\neq0$). Demuestra que:

a) Si una raíz es la opuesta de la otra, entonces b = 0.

b) Si la suma de las raíces es igual a su producto, entonces b +c =0.

c) Si las raíces son recíprocas, entonces a = c.

d) Si la diferencia de las raíces es igual a su producto, entonces su discriminante es igual a c^2.

e) Si una raíz es el duplo de la otra, entonces $2b^2 - 9ac=0$.

f) Si una solución es el triplo de la otra, entonces $\frac{3b^2}{16} = ac$.

4. Resuelve:

$$2(1-x)=3x-\left[2x-(-3x+2\right]+10x$$

$$x(x+3)=3x^2+2x+3$$

$$(2x-3)^2-(x+5)=-23$$

$$\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x-2}-\frac{x^2-2}{x^2-2x}=0$$

Resolver inecuaciones lineales

- Los sumandos se transponen de igual manera que en las ecuaciones, agrupando en un miembro los términos que contienen variables y los números en el otro.
- El coeficiente de la variable se transpone de igual forma que en las ecuaciones, prestando atención a que:
  - Si el coeficiente es positivo; la desigualdad no se altera.
  - Si el coeficiente es negativo; el signo de la desigualdad se invierte.

Resolver inecuaciones cuadráticas

- Comparar con cero y reducir términos semejantes.
- Multiplicar por (-1) si el coeficiente de la variable de mayor exponente es negativo (cambia el sentido de la desigualdad).
- Descomponer en factores.
- Determinar los ceros.
- Representar los ceros en la recta numérica:
  - Si es $\leq$ ó $\geq$ entonces se representa con ●
  - Si es $<$ ó $>$ entonces se representa con ○.
- Representar el signo de cada intervalo. Comenzar con signo (+) y alternarlo con signo (-), siempre de derecha a izquierda. No hay cambio de signo si el cero es doble.
- Representar gráficamente el conjunto solución partiendo del último signo del proceso de resolución de la inecuación ($<, \leq, >, \geq$):
  - Si es $<$ ó $\leq$ se señalan los intervalos con signo (-).
  - Si es $>$ ó $\geq$ se señalan los intervalos con signo (+).
- Plantear el conjunto solución:
  - Si , ○ ∞ ,-∞ entonces (;).
  - Si , ● entonces [;].

Resolver inecuaciones fraccionarias

- Comparar con cero.
- Realizar la operación que se obtenga.
- Multiplicar por (-1) el numerador o el denominador si el coeficiente de la variable de mayor exponente de uno de ellos es negativo. (Cambia el sentido de la inecuación)
- Descomponer en factores el numerador y el denominador. (Cuando se simplifican factores hay que excluir del conjunto solución los ceros de los factores que se simplifican)
- Representar los ceros en la recta numérica:
  - Si es $\leq$ ó $\geq$ entonces se representa con .
  - Si es $<$ ó $>$ entonces se representa con .
  - Los ceros del denominador nunca se incluyen.
- Representar el signo de cada intervalo. Comenzar con signo (+) y alternarlo con signo (-), siempre de derecha a izquierda. No hay cambio de signo si el cero es doble.
- Representar gráficamente el conjunto solución partiendo del último signo del proceso de resolución de la inecuación ($<, \leq, >, \geq$):
  - Si es $<$ ó $\leq$ se señalan los intervalos con signo (-).
- Si es $>$ ó $\geq$ se señalan los intervalos con signo (+).
- Plantear el conjunto solución:
  - Si , ∞ ,-∞ entonces (;).
  - Si , entonces [;].

Ejercicios resueltos:

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{5x^2+x^3}{-(2x+3)} \leq 0$ b) $\frac{4x^2-9}{2x^2+x-3} \div \frac{2x-3}{x^3-1} \leq 4-x$

Solución:

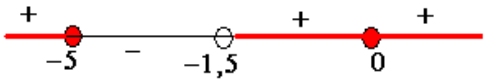
a) $\frac{5x^2+x^3}{-(2x+3)} \leq 0$ al multiplicar la inecuación por (-1) se obtiene lo siguiente:

$\frac{5x^2+x^3}{2x+3} \geq 0$ Luego buscando los ceros del numerador (CN) y los ceros del denominador (CD) se obtiene:

Ceros del numerador: $5x^2 + x^3 = x^2(5 + x)$ de donde se tiene que $x_1 = 0$ es un cero doble $x_2 = -5$

Cero del denominador: $x_3 = -\frac{3}{2}$

Solución gráfica:



Solución analítica: $S = (-\infty;-5] \cup (-1{,}5;+\infty)$

b) $\frac{4x^2-9}{2x^2+x-3} \div \frac{2x-3}{x^3-1} \leq 4-x)$

$\frac{(2x+3)(2x-3)}{(2x+3)(x-1)} \bullet \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{2x-3} + (x-4) \leq 0$ Al simplificar en la operación indicada debemos tener en cuenta que: $x \neq \pm\frac{3}{2};1$ ya que estos valores indefinen a los denominadores obteniendo entonces:

$x^2+x+1+x-4 \leq 0$; la cual conduce a la inecuación $x^2+2x-3 \leq 0$

$(x+3)(x-1) \leq 0$ Esta expresión tiene dos ceros que son: $x_1 = -3$ y $x_2 = 1$

Solución gráfica:

Solución analítica: $S = [-3;1) / \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

2. Sea : $A(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4}$

Determine el conjunto de los números reales no negativos para los cuales se cumple que **A(x)≤0.**

Solución:

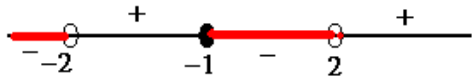
$A(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4} \leq 0$

$\frac{(x-2)(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \leq 0$ Al buscar los ceros del numerador y el denominador se obtiene

Ceros del numerador: x_1=2 (doble) y x_2=-1

Ceros del denominador: x_3 = 2 y x_4 = -2

Solución gráfica:



Solución Analítica: **S = [0; 2)**

3. Resuelve la inecuación $\frac{x}{x-5} - \frac{1}{x-4} \leq \frac{x}{x^2-9x+20}$

Solución:

$\frac{x}{x-5} - \frac{1}{x-4} \leq \frac{x}{x^2-9x+20}$

$\frac{x}{x-5} - \frac{1}{x-4} - \frac{x}{x^2-9x+20} \leq 0$

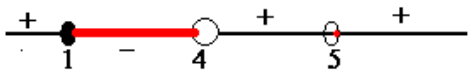
$\frac{x}{x-5} - \frac{1}{x-4} - \frac{x}{(x-5)(x-4)} \leq 0$; $\frac{x(x-4)-(x-5)-x}{(x-5)(x-4)} \leq 0$

$\frac{x^2-4x-x+5-x}{(x-5)(x-4)} \leq 0$; $\frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x-4)} \leq 0$

$\frac{(x-5)(x-1)}{(x-5)(x-4)} \leq 0$ Ceros del numerador: x_1=1 y x_2=5

Ceros del denominador: x_3 = 5 y x_4 = 4

Solución gráfica:



Solución analítica: **S = [1; 4)**

Ejercicios propuestos

1. Sean $f(x)=\frac{2x-5}{x+5}$ y $g(x)=\frac{1}{x-3}$

   Determina para qué valores de **x** se cumple: $\mathbf{3^{f(x)} \geq 3^{g(x)}}$

2. Sean: $A=\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}$ y $B=\frac{1}{x^4-1}$

Halle el mayor número entero negativo **x** para el cual se cumple $\mathbf{AB \leq 0}$.

3. Dadas las funciones f y g definidas por:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}; \qquad g(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$$

a) Halla el dominio de la función g.

b) Determina los valores reales de x, tales que f(x).g(x)>0

Ecuaciones con radicales

- Aislar el radical.
- Elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Simplificar radicales.
- Resolver la ecuación que se obtiene.
- Comprobar en la ecuación original. (Obligatorio)
- Plantear el conjunto solución.

Ecuaciones exponenciales

- Para resolver ecuaciones exponenciales hay que tener en cuenta que:
- * Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$ (a>0; a≠1)
- Resolver la ecuación que se obtiene a partir de la igualdad de los exponentes.
- Comprobar.
- Plantear conjunto solución.

Inecuaciones exponenciales

- Para resolver inecuaciones exponenciales hay que tener en cuenta que:

  a) Si a >1, se cumple: Si $a^x < a^y$, entonces x < y.

  b) Si 0 < a < 1, se cumple: Si $a^x < a^y$, entonces x > y.

Es importante que lo valorado hasta aquí referido a la solución de ecuaciones tengamos siempre en cuenta que para aquellos casos en que aparezca una ecuación combinada hay que transformarla a casos conocidos.

Resolver una ecuación es, en esencia, transformarla en una más sencilla (generalmente conocida) aplicando los conceptos y propiedades estudiadas, es decir, reduciendo lo nuevo a lo ya conocido. Si el alumno aprende bien a resolver ecuaciones lineales y cuadráticas no tendrá mayores dificultades para resolver los otros tipos de ecuaciones que ellos estudian pues las mismas son transformables a lineales o cuadráticas. Ilustremos esta idea, escribiendo las transformaciones realizadas a una ecuación combinada (muy compleja para los alumnos) para convertirla en una más sencilla:

Veamos el siguiente ejemplo resuelto:

Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$2^{\log x} \; 2^{\log(2x+7)} = 4^{\log(x+2)}$$

$$2^{\log x+\log(2x+7)} = 2^{2\log(x+2)}$$ (Propiedad de las potencias)

$$2^{\log(2x^2+7x)} = 2^{\log(x^2+4x+4)}$$ (Propiedad de los logaritmos)

$\log (2x^2+7x) = \log (x^2+4x+4)$ (Concepto de función)

(Exponencial)

$2x^2+7x = x^2+4x+4$ (Concepto de función)

(Logarítmica)

Ecuación cuadrática

$x^2 + 3x - 4 = 0$ Ecuación cuadrática en su forma normal

(x + 4) (x – 1) = 0 Teorema de Vieta

x + 4 = 0 Ecuaciones

x – 1 = 0 lineales

Se realiza la comprobación y se obtiene que el conjunto solución es:

S = {1} pues x =-4 no pertenece al dominio de la expresión

Ejercicios resueltos:

Nota: Estos ejercicios corresponden a pruebas de ingresos aplicadas en años anteriores.

1. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}+1=0$

b) $2^{\log x}\cdot 2^{\log(2x+7)}=4^{\log(x+2)}$

c) $\log_{3x}\left(16x^2+13x-2\right)-\log_7 49=0$

Solución:

a) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+2}+1=0$. Primeramente, debemos aislar un radical obteniendo lo siguiente: $\sqrt{2x-3}+1=\sqrt{x+2}$. Elevando al cuadrado ambos miembros.

$2x-3+2\sqrt{2x-3}+1=x+2$. Reduciendo términos semejantes y aislando el radical: $2\sqrt{2x-3}=4-x$. Elevando nuevamente al cuadrado ambos miembros. $4(2x-3)=16-8x+x^2$. Estamos en presencia de una ecuación cuadrática. $8x - 12 = 16 - 8x + x^2$. Formando la ecuación cuadrática.

$x^2 - 16x + 28 = 0$. La cual se descompone en:

$(x-2)(x-14) = 0$. Obteniendo como posibles soluciones: $x_1= 2$ y $x_2=14$. Al comprobar ambas soluciones se verifica que solamente el valor $x_1= 2$ es solución de la ecuación por tanto S = {2}.

b) $2^{\log x}\cdot 2^{\log(2x+7)}=4^{\log(x+2)}$

$2^{\log x}\cdot 2^{\log(2x+7)}=2^{2\log(x+2)}$ (Aplicando propiedades de la potencia se obtiene)

$\log x+\log(2x+7)=2\log(x+2)$ (Empleando propiedades de los logaritmos

$\log x(2x+7)=\log(x+2)^2$ .De se obtiene que:

$2x^2+7x=x^2+4x+4$. Formando la ecuación cuadrática

$x^2+3x-4=0$. Utilizando la descomposición por Vieta

$(x+4)(x-1)=0$. Obteniendo como posibles soluciones

x_1=-4 (la cual no es solución pues logx no está definido para este valor) y

x_2= 1. Comprobando la ecuación original para este valor

MI $2^{\log x} \bullet 2^{\log(2x+7)} = 2^{\log 1} \bullet 2^{\log 9} = 2^0 \bullet 2^{\log 9} = 1 \bullet 2^{\log 9}$

MD $4^{\log(x+2)} = 4^{\log 3} = 2^{2\log 3} = 2^{\log 3^2} = 2^{\log 9}$ y como el MI = MD entonces S = {1}

c) $\log_{3x}\left(16x^2 + 13x - 2\right) - \log_7 49 = 0$.

$\log_{3x}(16x^2 + 13x - 2) - 2 = 0$ (Calculando el $\log_7 49$), luego planteamos

$\log_{3x}(16x^2 + 13x - 2) = 2$ y utilizando la definición logarítmica se obtiene:

$16x^2 + 13x - 2 = (3x)^2$

Formando la ecuación cuadrática:

$16x^2 + 13x - 2 = 9x^2$ Formando la ecuación cuadrática:

$7x^2 + 13x - 2 = 0$ La cual se descompone en:

$(7x - 1)(x + 2) = 0$. Con los posibles ceros siguientes: $x_1 = \frac{1}{7}$ y $x_2 = -2$ (Pero este valor no puede ser solución ya que la base del $\log_{3x}$ sería entonces -6 el cual no pertenece al dominio, puesto que 3x>0). Comprobando para $x_1 = \frac{1}{7}$

MI $\log_{3x}\left(16x^2 + 13x - 2\right) - \log_7 49 = \log_{\frac{3}{7}}(16 \bullet \frac{1}{49} + 13 \bullet \frac{1}{7} - 2) - 2 = \log_{\frac{3}{7}}(\frac{16}{49} + \frac{13}{7} - 2) - 2$

$= \log_{\frac{3}{7}}(\frac{16 + 91 - 98}{49}) - 2 = \log_{\frac{3}{7}}(\frac{9}{49}) - 2 = 2\log_{\frac{3}{7}}\frac{3}{7} - 2 = 2 - 2 = 0$

MD: 0 de donde MI = MD, luego la solución de la ecuación es: S = $\{\frac{1}{7}\}$

2. Resuelve la siguiente inecuación:

$\log_3\left[5^{(x-3)^2}\right] \geq \log_3 5^{2x-7} + \log_3 5^{x+2}$

Solución:

$\log_3\left[5^{(x-3)^2}\right] \geq \log_3 5^{2x-7} + \log_3 5^{x+2}$ Aplicando propiedades de los logaritmos y de la potencia

$\log_3\left[5^{(x-3)^2}\right] \geq \log_3 5^{2x-7+x+2}$, o sea que:

$\log_3\left[5^{(x-3)^2}\right] \geq \log_3 5^{3x-5}$ y como la base del logaritmo es mayor que 1, entonces:

$5^{(x-3)^2} \geq 5^{3x-5}$, de igual forma por las propiedades de la función exponencial, al ser 5 > 1, entonces:

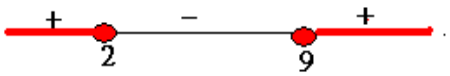
$(x-3)^2 \geq 3x-5$

$x^2-6x+9 \geq 3x-5$ Descomponiendo en factores:

$x^2-9x+14 \geq 0$

$(x-2)(x-7) \geq 0.$

Solución gráfica:



Solución analítica:

$S=(-\infty;2]\cup[9;+\infty)$ .También se puede escribir de la siguiente forma:

$S=\{x\in\Re / x\leq 2 ó x\geq 9\}$

Ejercicios propuestos:

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_3\sqrt{9^x-3^x+5}-\log_3\sqrt{3^{x+1}+2}=0$

b) $2^{\log x}:(\frac{1}{4})^{\log\sqrt{2x+7}}=4^{\log(x+2)}$

c) $\log_3(x+1)+1=\log_9(9x^2+45)$

d) $\log_{\sqrt{2}}(x-2)+\log_2(x+1)=5^{\log_5 2}$

e) $5^{2x^2-1}-3\bullet 5^{x^2-1}-2=0$

f) $\log_5\sqrt{25^x-5^x+7}-\log_5\sqrt{5^{x+1}+2}=0$

g) $2^{2x+2}+3\bullet 2^x=1$

h) $x^{\log^2 x+3\log x+3}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}$

i) $4^x-9^{x+1/2}=2\bullet 6^x$

j) $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x+\sqrt{4-\sqrt{15})^x}=3$

k) $11^{3x-2}+13^{3x-2}=13^{3x-1}-11^{3x-1}$

l) $\lg\sqrt[3]{75+5^{\sqrt{3x-5}}}=\dfrac{2}{3}$

m) $\lg 2+\lg(4^{-x-1}+9)=1+\lg(2^{-x-1}+1)$

n) $\sqrt{2\lg(-x-1)}=\lg\sqrt{(x+1)^2}$

o) $\lg(x-1)(x+3)+\lg\dfrac{x+3}{x-1}=0$

p) $\log_{2x+2}+\log_{2x+2}\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{16}\bullet 10^{\lg 8}$

q) $\log(x+11)-4\log_{49}7=\dfrac{\log(x-121)-\log(x-11)+\log 0{,}01}{\log(x+11)}$ Si $\{x\in R; x\leq -1\}$

r) $\log_{1/2}(4^{x-1}-5)=\log_{1/2}(4^x+24)-\log_{1/2}8$

2. Determina el conjunto solución de:

a) $7^{x^2-1}+7^{x^2}\le\frac{392}{49^x}$

b) $\log_2(x-1)-2\log_{1/4}(x^2-4)-\log_2(x+1)\le 1$

c) $(\frac{1}{2})^{\log_2\frac{x^2-4x+4}{x-3}}\ge(\frac{1}{4})$

d) $\log\frac{3x}{x^2-4}\ge\log 2-2\log\sqrt{2}$

e) $2^{\log_{1/3}(x^2-2x)}:2^{\log_{1/3}(x+4)}\ge 1$

f) $\log_{1/2}(x-2)+\log_2(x-1)>3^{\log_3 2+1}$

g) $\log_2(x-2)-\log_2(x^2-3x+2)\le\log_2(\frac{2(x-2)}{x^3-4x^2+5x-2})$

h) $2^{\log_{1/3}(x^2-2x)}:2^{\log_{1/3}(x+4)}\ge 1$

i) $2^{\frac{x^3+x^2}{2x-1}}\bullet(4)^{\frac{-x+1}{2x-1}}\ge 1$

j) $32^{\frac{1}{x-2}}\bullet\frac{1}{2}^{\frac{6-x}{(x-2)^2}}\ge 4$

k) $\log_2(x-1)-\log_{1/8}(x+2)^3\le 5^{\log_5\frac{2}{5}+1}$

3. Determina el mayor entero negativo que no satisface la inecuación:

$\log_2(x+2)-\log_{1/4}(x+1)^2\le 3^{\log_3(1/9)+2}$

4. Sabiendo que: $f(x)=9^x+3^{x+1}-1$. Determina los valores de x para los cuales

$f(x)=\sqrt{2f(x)+3}$

5. Sea f(x) = logx. Determina los valores de x que satisfacen la igualdad:

$f(2^{2x}+32)=f(12)+f(2^x)$

6. Sea $f(x)=\log x$ y $g(x)=2^x$. Para qué valores de x se cumple que:

$f(10^{x^2-4x+5})\ge g(2\log_{2x}\sqrt{2x}-1)$

7. Sabiendo que f(x) = x+3. Determine para qué valores naturales de x se cumple que:

$$3\log_3[f(x)-x]=(\log_{\sqrt{3}}\sqrt{f(x)})^2-\log_3[f(x)]^2$$

8. Sea $f(x)=2^x$. ¿Para qué valores de x se cumple que:

$$f(\frac{x^2+x}{x-2}):f(\frac{6}{x^2-3x+2})=f(\frac{x+3}{x-1})?$$

9. Sea $M=\log_3(a^3-2a^2+3)$ y $N=\log_3(a+1)$. Determine para qué valores de a se cumple que: $M=\frac{1}{2}\bullet 10^{\log 2}+N$

10. Dada la función: $m(x)=\log_2(x-2)$
    a) Indique el dominio e imagen de m.
    b) Determine para qué valores de x se cumple: $m(6)=m(x)-\log_{1/2}(x+1)$

11. Sea $f(x)=\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1}$. Para qué valores de x se cumple que: $[f(x)]^{\sqrt{x-3}}=\frac{1}{64}$

12. Determine para qué valores enteros de $x\in[-3;2]$ se cumple que:

$$\log_{1/4}\frac{x+2}{x}-\log_{1/4}\frac{x^2-4}{x^2}\geq 1$$

13. Resuelve: $\log_2(x^2+2x)+\log_{1/2}x=\log_2\left(2\sqrt{2x-1}+1\right)$

14. Sea f(x) = 2x. Halle el conjunto solución de la ecuación:

$$2^{\log\frac{1}{2}f(x)}\bullet 2^{\log[f(x)+7]}=4^{\log\left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]}$$

1. Resuelve: $\log_{27}(x+1/4)^3+\log_3 4x=5^{\log_2\sqrt{4}-1}$

2. Para qué valores de x se cumple que: $4^{\log_2\sqrt{x^2+16}}\bullet 2^{-\log_2 x}=2007^{\log_{2007}8}$

3. Resolver: $\log_7\sqrt{2x+3}-\log_{49}(x-2)=\log_7\sqrt{4x-3}$

4. Sea $f(x) = 4^x + 2^{x+1} - 1$. Determina los valores de x para los cuales $f(x) = \sqrt{f(x)+2}$.

5. Resuelve y comprueba: $\log_2(3^x + 7) - \dfrac{4}{\log_2(3^x + 7)} = 3$

6. Determina el conjunto solución de la siguiente ecuación: $3^{2x+1} + 2^{x+1} = 6 + 18^x$

7. Sea la función definida por $f(x) = \log(x+2)$

   a) Halla todos los números enteros t que satisfacen la siguiente igualdad: $f(t+1) + f(t) = f(4)$.

   b) Determina los valores reales x para los cuales: $\sqrt{f(x)+1} = 1 - \sqrt{f(x)}$

8. Determina todos los valores de "*m*" para los cuales *x* = 6 es una solución de la ecuación:

   $$\sqrt{m-1+\sqrt{mx+12}} = 3$$

   a) Investiga si para los valores de m hallados la ecuación tiene alguna solución diferente de 6.

9. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

   a. $\sqrt{2^x - 7} = 1 - \sqrt{2^x}$

   b. $1 + \log_{x+1}(x^3 + 1) = \log_2 8$

   c. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x^2 - 1} = 2$

   d. $\log_2 3^{x+1} + \log_{0,5} 3^{x^2-2} = \log_2 27$

10. Sea *h* la función dada por $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{log(3-x)}$. Halla los valores reales de la variable para los cuales la función *h* está definida.

11. Halla el conjunto solución de: $\log_2 \dfrac{5x-4}{4x^2 - 25} \leq 0$

12. Halla el dominio de definición de la siguiente función: $g(x) = log_{x+2} \dfrac{x-3}{x^2 - 16}$

13. ¿Cuál es el dominio de definición de la función *f*? $f(x) = \sqrt{3 - log_2 \dfrac{12x}{x^2 - 1}}$

3.2 Sistemas de ecuaciones

Llamamos **sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables** a dos ecuaciones de este tipo que pueden reducirse a la forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1\,y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

y que las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones con dos variables son las **soluciones comunes** a las dos ecuaciones que lo forman, es decir, son los pares ordenados (x ; y) que satisfacen a ambas ecuaciones.

También recordarás que un sistema podía tener **una única solución, no tener soluciones, o tener infinitas soluciones**

En este epígrafe estudiarás lo relativo a la función lineal y su representación gráfica en un sistema de coordenadas rectangulares.

Una recta en el plano puede representarse por la ecuación ax + by +c =0 (con x, y $\in$ R ; a y b no simultáneamente nulos) despejando y obtenemos $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, que es precisamente la ecuación de la función lineal.

Si relacionamos las soluciones que tiene un sistema con su interpretación geométrica, concluimos que:

Si el sistema tiene **solución única** entonces podemos decir que **las rectas se intersecan en un punto.**

Si el sistema **no tiene solución** entonces podemos decir **que las rectas son paralelas.**

Si el sistema tiene **infinitas soluciones** entonces las **rectas coinciden.**

¿Recuerdas cómo analizaste sí un sistema tenía una, ninguna o infinitas soluciones?

Teniendo ahora como recurso lo aprendido sobre la función lineal y su representación gráfica, te proponemos un procedimiento mucho más rápido para determinar si un sistema tiene o no solución.

Basta transformar ambas ecuaciones del sistema a la forma y = mx + n y analizar las pendientes de cada una de ellas. Si ellas son iguales, entonces comparamos los términos independientes.

Sea el sistema $\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$

Si $\mathbf{m_1 \neq m_2}$ el sistema tiene una **única solución** y las **rectas se intersecan.**

En el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ **y** $\mathbf{n_1 = n_2}$ el sistema tiene **infinitas soluciones** y las **rectas son coincidentes** y en el caso de ser $\mathbf{m_1 = m_2}$ **y** $\mathbf{n_1 \neq n_2}$ el sistema **no tiene solución** y **las rectas son paralelas.** Ten presente que para que $\mathbf{m_1 = m_2}$, tiene que ser $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

También en este epígrafe aprenderás el método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones, el cual consiste en representar gráficamente las rectas cuyas ecuaciones forman el sistema y así podemos determinar las coordenadas de los puntos comunes (en caso que existan).

Por lo general las soluciones que se obtienen por este procedimiento son valores aproximados.

Ejercicios propuestos:

1. Selecciona la respuesta correcta.

1.1 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 5y = -2 \\ \frac{1}{2}x - y = 6 \end{cases}$

a) __no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

1.2 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = 6 \end{cases}$

a) __ no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

1.3 El sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 6y = -2 \\ \frac{1}{2}x + y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

a) __no tiene solución b) __ tiene infinitas soluciones c) __ tiene una única solución

1.4 De dos rectas r_1 y r_2 conocemos que $m_1=m_2$ y $n_1=n_2$. Luego podemos afirmar que las rectas:

a) __son paralelas b) __se cortan en un punto c) __ son coincidentes

1.5 Si x + 5y = 15 corresponde a la ecuación de una recta. La ecuación que se puede seleccionar entre las siguientes para que el sistema tenga solución única es:

a) __ 2x +10y =30 b) __ $y = -\frac{1}{5}x + 8$ c) __ 5x – y = 15

1.6 Las coordenadas del punto de intersección de las rectas dadas en el sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y = \frac{7}{8}x \end{cases}$$

es: a) __ (5;4) b) __ (8;7) c) __(7;8)

Resolver sistemas de ecuaciones lineales. (2x2)

- Multiplicar convenientemente cada ecuación por un número de modo que al sumar las nuevas ecuaciones obtenidas se elimine una variable y se obtenga el valor de otra.
- Sustituir el valor de la variable obtenida en una de las dos ecuaciones para obtener el valor de la otra.
- Plantear el conjunto solución.

Resolver sistemas de ecuaciones lineales. (3x3)

- Se toman dos parejas de ecuaciones en las que se elimina la misma variable, para obtener dos nuevas ecuaciones con dos variables.
- Se resuelve el sistema formado por estas dos ecuaciones.
- Se sustituyen los valores encontrados en una de las ecuaciones originales y se halla el valor de la otra variable.
- Plantear el conjunto solución.

Ejercicio resuelto:

1. Hallar el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones

   (1) $2x + y – 3z = 5$

   (2) $x – y + 4z = 5$

   (3) $3x + 2y + 2z = 15$

Para darle solución a este sistema empleando los pasos indicados anteriormente, es decir primeramente sumemos las ecuaciones (1) y (2) obteniendo la ecuación (4) $3x + z = 10$, luego sumemos la ecuación (1)•2 y la ecuación (3), obteniendo la ecuación (5) $5x + 10z = 25$ y dividiendo esta ecuación por 5 se logra (6) $x + 2z = 5$.

Ahora debemos resolver el sistema de ecuaciones con (4) y (6), es decir:

(4) $3x + z = 10$ / •(-2) $-6x – 2z = - 20$

(6) $x + 2z = 5$ $x + 2z = 5$ obteniendo $-3x = -15$; o sea $x = 3$

Sustituyendo este valor (4) $9 + z = 10$, $z = 1$ y sustituyendo en (1) $6 + y – 3 = 5$

$y = 2$. Se realiza la comprobación y se indica el conjunto solución. S = {(3: 2: 1)}

Resolver sistemas de ecuaciones cuadráticas.

- Se despeja una variable en la ecuación lineal.
- Se sustituye la variable despejada en la ecuación cuadrática.
- Se resuelve la ecuación de segundo grado obtenida.
- Se calculan los valores de la otra variable.
- Plantear el conjunto solución.

Ejercicio resuelto:

1. Determina el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

(1) $x^2 + xy - y^2 = 4$

(2) $2x - y = 2$

Despejando y en la ecuación (2) se obtiene (3) y = 2x – 2 , sustituyendo (3) en (1)

$$x^2 + x(2x-2) - (2x-2)^2 = 4$$

$$x^2 + 2x^2 - 2x - (4x^2 - 8x + 4) - 4 = 0$$

$$x^2 + 2x^2 - 2x - 4x^2 + 8x - 4 - 4 = 0$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0$$

Multiplicando esta ecuación por (-1), obtenemos $x^2 - 6x + 8 = 0$ y al descomponer en factores se tiene que $(x-2)(x-4) = 0$; logrando de esta manera los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$, sustituyendo estos valores en (3) se obtiene $y_1 = 2$ y $y_2 = 6$

Se comprueban ambos pares ordenados en el sistema original y se comprueba que ambos son soluciones, por tanto, S = {(2; 2), (4; 6)}

Ejercicios propuestos:

1. Hallar el conjunto solución de cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x - y = 3x - 12 \\ x + y = 2x - 2y + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x-y}{3} = x - 4 \\ \dfrac{x+y}{2} = x - y + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 27 \\ \dfrac{4}{3x} + \dfrac{3}{y} = 13 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x = y - 2 \\ 2y = 3z \\ x + y - 3 = z \end{cases}$ e) $\begin{cases} x(y+z) = 9 \\ y(x+z) = 16 \\ z(y+x) = 25 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - y^2 = 17 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} \log_5 (3^{2\log_3 x + \frac{1}{2}\log_7 49}) = \log_5 2y \\ 2^y : 2^x = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log_7 (5^{2\log_3 x + 2\log_2 4}) = \log_7 4y \\ y - x = 0 \end{cases}$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \log_y (x-1) = 1 \\ \log_x (4y+1) = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \log_x (y-1) = 3 \\ \log_y (5-x) = \frac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \left(2^x\right)^y = 4\sqrt{2} \\ \log(x+y) + \log 4 = \log 11 - \log y \end{cases}$ d) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 8 \\ \log(x^2 : y) = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10 \cdot 5^x - 4 \cdot 2^y = 1 \\ 20\left(5^x + 2^y\right) - \frac{9}{20} = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3^{x-5y} = 243 \\ \log x - 2 = -\log y \end{cases}$

g) $\begin{cases} \sqrt{x++y+z}=3 \\ \dfrac{x+y}{z+1}=1 \\ 2^{2x\ +\ z}-2^{11\ -\ y}=0 \end{cases}$

Resolver problemas

Recordemos el procedimento para resolver um problema planteado anteriormente:

- Leer y analizar detenidamente el texto del problema.
- Designar mediante el lenguaje algebraico que representa(n) la(s) incógnita(s), así como las relaciones o combinaciones en que intervenga(n) esta(s).
- Plantear la(s) ecuación(es) correspondiente(s).
- Resolver la ecuación obtenida o el sistema de ecuaciones.
- Comprobar en texto del problema, nunca en las ecuaciones; puede ser mentalmente.
- Dar la respuesta atendiendo a lo que se pide en el enunciado del problema.

Ejercicio resuelto: Estos problemas corresponden a diferentes pruebas de ingreso aplicadas.

1. En un centro deportivo hay 400 atletas varones más que hembras. Se decidió trasladar para otro centro al 70% de los varones y al 20% de las hembras, quedando en el centro inicial 100 hembras más que varones. ¿Cuántos atletas de cada sexo se quedaron en el centro deportivo?

Solución: Designemos con variables lo que se plantea en el problema.

Cantidad de varones. x

Cantidad de hembras. y

(1) x = y + 400

(2) 0,3x+100=0,8y

Sustituyendo (1) en (2) $0,3(y+400)+100=0,8y$

$0,3y+120+100=0,8y$

$0,5y=220$

$y=\dfrac{220}{0,5}$

$y=440$ y al sustituir este valor en (1) se obtiene x = 840

$\dfrac{30}{100}\bullet 840=252$ Cantidad de varones que se quedan

$\dfrac{80}{100}\bullet 440=352$ Cantidad de hembras que se quedan

Respuesta: En el centro deportivo se quedaron 252 varones y 352 hembras.

2. La suma de los valores absolutos de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y unidades. La diferencia entre la cifra de las decenas y la cifra de las centenas es 3. ¿Cuál es el número?

Datos:

Cifra de las unidades u

Cifra de las decenas. d

Cifra de las centenas c

Para resolver el problema debemos plantear el siguiente sistema de acuerdo a lo planteado en el texto del mismo.

$$\begin{aligned} c+d+u &= 14 \\ d &= c+u \\ d-c &= 3 \end{aligned}$$

Al sustituir (2) en (1) se obtiene d + d = 14, o sea, 2d =14, de donde d = 7, pero como d – c = 3 y en (2) d – c =u por tanto u = 3 y sustituyendo d = 7 y u = 3 en (1) c = 14 – (d+u) = 14 – 10 = 4.
Repuesta: El número es 473.

Ejercicios propuestos:

(**Todos estos problemas corresponden a diferentes pruebas de ingreso)**

1. Con la finalidad de hacer un completamiento del uniforme (un pantalón y una camisa) de los trabajadores de una empresa, el administrador hizo una compra al almacén de 20 pantalones y 50 camisas por un valor de $ 1500.00. Posteriormente, por el mismo precio de cada pieza, se hizo una segunda compra de 5 pantalones y 4 camisas por un valor de $ 205.00. Si posteriormente llegaron a la empresa tres nuevos trabajadores, ¿cuánto debe pagar la administración por la compra de los tres últimos uniformes?

2. Como parte de las medidas de beneficio a la población, en un consejo popular de un municipio, dos brigadas de trabajadores sociales A y B se planificaron visitar entre ambas 330 viviendas. En un momento en que fue controlada la actividad, la brigada A había visitado las dos terceras partes de la cantidad de viviendas que se había propuesto visitar, mientas que la B, había visitado el 80% de las viviendas que se había planificado visitar. Si en ese momento solo faltaban por visitar 86 viviendas, ¿cuántas habían visitado cada brigada, hasta el momento en que fue controlada la actividad?

3. El perímetro de un triángulo es 12 m y la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus lados es 50 m^2. Calcule los lados de dicho triángulo si estos forman un número de tres cifras que, restado a otro con cifras iguales, pero en orden inverso da como resultado 198. ¿Cuántos triángulos de estos son necesarios para cubrir una superficie de 120 m^2?

4. En un número de tres cifras se conoce que la cifra de las centenas y las decenas son iguales. La suma de la cifra de las unidades y las decenas es igual al cuadrado de la cifra de las centenas. Determina el 22,5% de dicho número si la suma de sus cifras básicas es 12.

5. El promedio de las notas de un estudiante en Matemática, Historia y Español es 88 puntos. Si hubiera obtenido 100 puntos en Matemática, el promedio sería 92 pero si en lugar de obtener 100 en Matemática lo hubiera obtenido en español sería 94 el promedio. ¿Qué promedio hubiera obtenido si los 100 puntos los hubiera obtenido en Historia?

6. Tres trabajadores sociales María, Luis y José visitaron cierto número de viviendas durante dos jornadas de trabajo con la finalidad de actualizar el cobro de los efectos electrodomésticos entregados como parte de los proyectos de la Revolución. Como resultado del trabajo realizado en la primera jornada se sabe que fueron visitadas por los tres un total de 100 viviendas, y que María visitó 5 casas menos que las que visitó Luis, sin embargo, en la segunda jornada con respecto a la primera, la cantidad de viviendas visitadas por Luis disminuyó en un 10 %, mientras que José aumentó en 5 la cantidad de viviendas visitadas. Si en esta última jornada se visitaron por ellos dos el 77% del total de las viviendas visitadas durante la primera jornada, ¿cuántas viviendas visitó Luis y cuántas José en esta última jornada?

7. Dos ciclistas se entrenaban para una competencia y en ese momento la suma de los cuadrados de sus pesos era igual a 6100 kg. Se conoce que uno de los ciclistas pesaba 10 kg más que el otro. Finalmente, uno de los ciclistas no pudo participar en la competencia. Durante el evento el ciclista participante bajó de peso la misma cantidad de kilogramos que aumentó el ciclista que no participó, alcanzando así ambos el mismo peso. Calcula el peso de los ciclistas después de celebrada la competencia. (92-93)

8. Dos fábricas producen el mismo tipo de piezas. Juan trabaja en una de ellas y David en la otra. Entre ellos tiene lugar el siguiente diálogo:

   Juan: Si mi fábrica lograse aumentar su producción diaria en 19 piezas, entonces produciría cada día el doble de lo que tu fábrica produce diariamente.

   David: ¿Tú conoces la producción diaria del país?

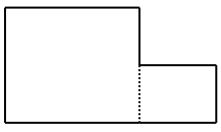
   Juan: Sí, es de 87 piezas.

   David: Pues si tu fábrica produjese diariamente 2 piezas menos, entonces el cuadrado de esa producción sumado con lo que el país produce diariamente sería 8 veces lo que nuestras dos fábricas juntas producen al día en estos momentos. ¿Cuántas piezas producen diariamente cada fábrica? (92-93)

9. Las tres cifras de un número suman 13. Si del número se resta 270 se obtiene otro número de tres cifras en el cual resultan intercambiadas la cifra de las centenas y de las decenas, pero se conserva la cifra de las unidades. El número de dos cifras formado por la cifra de las decenas y la de las unidades del número original es igual a 6 veces la cifra de las centenas. ¿Cuál es el número? (93 – 94)

10. Un terreno rectangular tiene 30 m de ancho y 50 m de largo. ¿En cuántos metros debe disminuirse el ancho y en cuántos aumentarse el largo para que el perímetro aumente en 30 m sin cambiar el área? (94 - 95)

11. Con dos cuadrados se forma una figura de seis lados como se muestra en el dibujo. Calcula las longitudes de los lados de los cuadrados sabiendo que la figura obtenida tiene **233 cm²** de área y **68 cm** de perímetro. (94 – 95)



12. Dos fábricas debían producir entre ambas 360 bicicletas, según sus respectivos planes de producción. La primera de ellas cumplió su plan al 112% y la segunda al 110% y entre las dos produjeron 400 bicicletas.

    a) ¿Cuál era el plan de producción de cada fábrica?

    b) ¿Cuántas bicicletas produjo cada fábrica?

CAPÍTULO 4. FUNCIONES

4.1 Concepto función

Función: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera no vacíos. Se denomina función de A en B a la correspondencia formada por todos los pares ordenados que tienen como primera componente a todos los elementos del conjunto A tomados una vez.

Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$\{(1; 2), (2; 2), (3; 2)\}$ y $\{(1; 2), (2; 3), (3; 4)\}$

Son ejemplos de funciones entre los conjuntos, ¿podrías formar otras?

Función real: Sea $\Re$ el conjunto de los números reales. Se denomina función real de $\Re$ en $\Re$ a la correspondencia f formada por todos los pares ordenados que tienen como primera componente a todos los elementos x del conjunto $X \subseteq \Re$ tomados una vez. Se representa la correspondencia de la forma siguiente $f : X \subseteq \Re \to \Re$ y a ley de correspondencia por $x \mapsto f(x)$. Como regla utilizaremos la variable x como variable independiente de la función y a f(x) o y como variable dependiente.

Ejemplos de funciones reales:

a) $y = x$

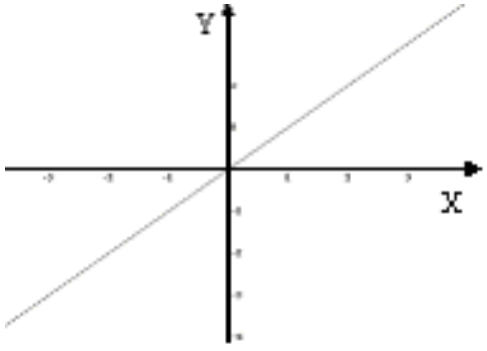


Figura 21: Función real

En esta función la ley de correspondencia asocia a cada número real su mismo valor. Su representación gráfica como se observa es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

b) $y = x^2$

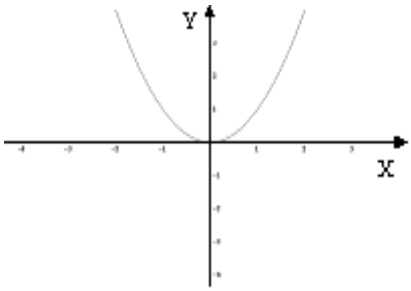


Figura 22: Función real: $y = x^2$

En esta función la ley de correspondencia asocia a cada número real el cuadrado de su valor. Su representación gráfica como se observa es la de una curva que está en el primer y segundo cuadrantes.

Ejercicio propuesto 1: Dada la función f que a cada número asocia el triple más uno:

a) ¿Es esta una función real?

b) Escriba su expresión algebraica.

c) Calcule f(1) y f(¾)

Propiedades de las funciones

1) Dominio: Es el conjunto que agrupa todas las primeras componentes de los pares ordenados que forman una función.

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente en una función. Estos valores también son llamados preimágenes de la función.

Para determinar el dominio de una función tendremos en cuenta, ante todo, con qué tipo de función estamos trabajando y procederemos en consecuencia con ello.

Para el caso de la función $y = x$ su dominio es el conjunto de los números reales, en el caso de la función $y = x^2$ ¿Cuál será su dominio?

2) Imagen: Es el conjunto que agrupa todas las segundas componentes de los pares ordenados que forman una función.

Es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente en una función. Estos valores también son llamados imágenes de la función.

El conjunto imagen de una función se determina, en dependencia de la función de que se trate.

Para el caso de la función $y = x^2$ su imagen es el conjunto de los números reales no negativos, es decir, los mayores o iguales a cero, en el caso de la función $y = x$ ¿Cuál será su imagen?

Ejercicio propuesto 2: En el ejercicio 2 halle el dominio y la imagen de la función.

En general se utilizan diferentes formas para denotar a las funciones, entre otras tenemos y = x; y(x) = x^2; f (x) = x; s(x) = x^2; como se observa se utilizan las letras del alfabeto y un signo de igualdad donde en el miembro derecho aparece la variable del dominio expresando la ley de correspondencia y como resultado de los valores que se alcanzan en el miembro izquierdo aparece el valor de la imagen, que como observa se denota por "y", asumiendo y(x) o f(x) o s(x).

3) Ceros: En una función, son los valores de "x" que hacen que "y" sea cero. En la representación gráfica de una función, son los valores donde la curva "corta o toca" al eje de las "x".

x_1 es un cero de la función f si y sólo si $f(x_1) = 0$.

Para calcular los ceros de una función sustituimos "y" por 0 y resolvemos la ecuación planteada.

Ejemplo: si queremos determinar los ceros de la función, $f(x) = x^2$ debemos sustituir $f(x)$ por cero y despejar el valor de x. Esto nos llevaría a resolver la ecuación $x^2 = 0$ *que es equivalente a* $x = \pm\sqrt{0} = 0$, por lo que el cero de la función es $x = 0$.

Ejercicio propuesto 3: Calcule, de existir, los ceros de las funciones siguientes:

a) y=3x-¼

b) $y=4x^2-1$

c) y=3

4) Inyectividad: Una función se dice inyectiva si cada elemento del conjunto imagen está asociado exactamente con una pre-imagen.

En símbolos: f inyectiva si y sólo si $f(x_1) = f(x_2)$ de donde $x_1 = x_2$ para todo $x_1, x_2 \in$ Dom f ó

f inyectiva si y sólo si de $x_1 \neq x_2$ se obtiene $f(x_1) \neq f(x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in$ Dom f

Desde el punto de vista gráfico, podemos afirmar que si una función es inyectiva, cualquier recta paralela al eje de las "x" tendrá con el gráfico de la función, a lo sumo un punto común.

Si queremos analizar si una función es inyectiva procedemos según la caracterización dada anteriormente.

En el caso de la función $f(x) = x^2$ como se observa en la gráfica de esta función cualquier recta paralela al eje de las x, por encima de éste, corta al gráfico de la función en dos puntos, luego no sería inyectiva, pero, ¿Cómo probarlo?

Si utilizamos el contra recíproco $x_1 \neq x_2$ *si y sólo si* $x_1^2 \neq x_2^2$, este no se cumple para los valores $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ ya que $x_1 \neq x_2$ y $x_1^2 = x_2^2 = 1$

Ejercicio propuesto 4: ¿Es la función f(x)=x inyectiva?

Ejercicio propuesto 5: En el ejercicio 1 Analice si la función es inyectiva

Ejercicio propuesto 6: En el ejercicio 3 determine cuáles de las funciones son inyectivas

5) Sobreyectividad: Una función se dice sobreyectiva si el conjunto imagen es igual al conjunto de llegada.

Ejercicio propuesto 7: ¿Son las funciones f(x)=x y $g(x)=x^2$ sobreyectivas?

Ejercicio propuesto 8: En los ejercicios 1 y 3 determine cuáles de las funciones son sobreyectivas.

6) Signos: Una función tiene signo positivo (signo negativo) en los valores de "x" cuyas imágenes sean números positivos (negativos).

Gráficamente, una función es positiva (negativa) para aquellos valores de "x" que cumplan que su representación gráfica se encuentre por encima (por debajo) del eje de las "x".

Por ejemplo, para determinar los intervalos donde una función es positiva (o negativa), procedemos de la siguiente forma:

Igualamos a cero la función y determinamos sus ceros.

Situamos estos ceros en una recta numérica y procedemos a resolver las inecuaciones $f(x)>0$ y $f(x)<0$

7) Monotonía: Una función es monótona creciente (decreciente) estricta si a medida que aumentan los valores de las "x", aumentan (disminuyen) los valores de las "y".

En símbolos: f monótona creciente (decreciente) estricta en un intervalo (a;b) sí y sólo sí para todos $x_{,},x_2 \in (a;b)$ se cumple: si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$ (si $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$).

Ejemplo: La función $f(x)=x^2$ alcanza los mismos valores para los números positivos y sus correspondientes opuestos, por ello el análisis debemos hacerlo primero para los números positivos y luego para los negativos o viceversa.

Sean x_1 y x_2 números no negativos y tales que $x_1<x_2$ entonces, $x_1^2 < x_2^2$, por propiedad de los números reales, por tanto la función es creciente en sentido estricto para $x\in[0;+\infty)$, es decir, a la derecha de 0.

Para el caso contrario, sean x_1 y x_2 números negativos y tales que $x_1<x_2$ entonces, $x_1^2 > x_2^2$, por propiedad de los números reales, por tanto la función es decreciente en sentido estricto para $x\in(-\infty; 0)$, es decir, a la izquierda de 0.

Apoyados en los conocimientos que tenemos de las funciones f(x)=x y $g(x)=x^2$ podemos realizar el estudio de muchas más, como son las funciones cuyas gráficas pasan por x=0 a partir de f(x)=x, las cuales son de la forma f(x)=mx.

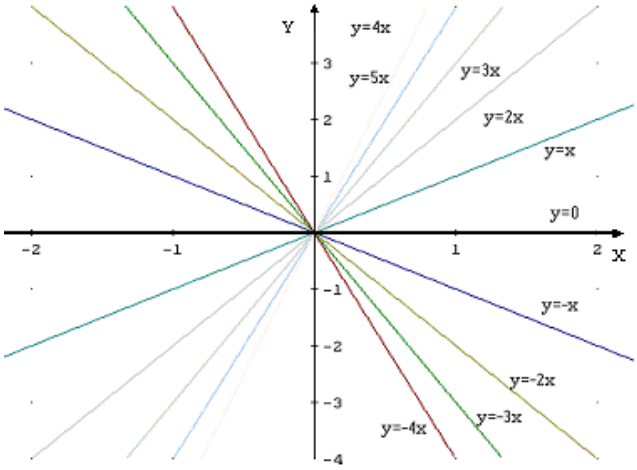
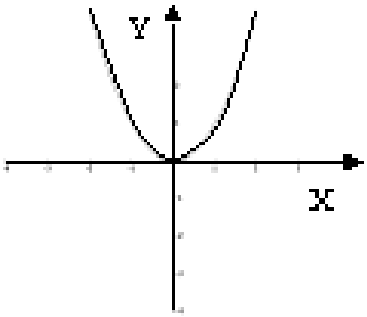


Figura 23 : Monotonía

Casos particulares de esta familia son y=x, y=2x, y=0, y=-3x, y=-¼ x, etc.

La función $y=x^2$ pertenece a la familia de funciones llamadas potenciales. Los gráficos de algunas de las funciones potenciales definidas por ecuaciones de la forma $y = x^n$ ($n \in Z$, n≠1) se muestran a continuación, donde se puede observar algunas regularidades en el caso de los exponentes pares positivos, las gráficas se asemejan a $y=x^2$, unas más "pegadas" al eje de ordenadas y otras menos "pegadas" (Figura 1.6). Para el caso de los exponentes impares se asemejan a $y=x^3$, con la misma particularidad de la anterior (Figura 1.8).

En el caso de las funciones potenciales de exponentes negativos, la particularidad es que el gráfico se interrumpe en 0 y presentan regularidades semejantes a las anteriores con relación a estar más "pegadas" o menos "pegadas" al eje de ordenadas. Las propiedades que cumplen estas funciones serán estudiadas después de las ilustraciones.



$y=x^2$

$y=x^4$

Figura 24: Funciones potenciales de exponente par

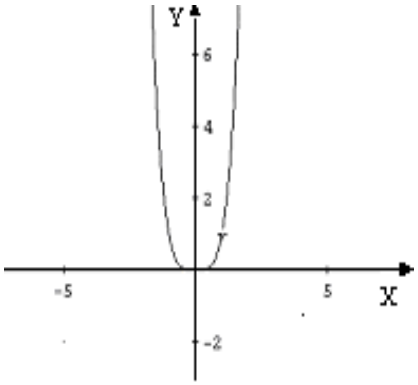


Figura 25: Funciones potenciales de exponente par

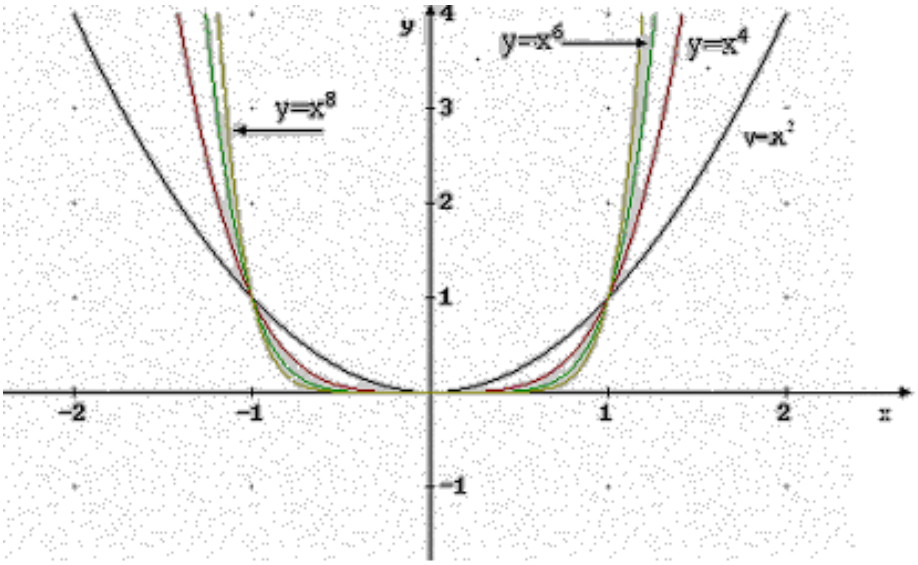
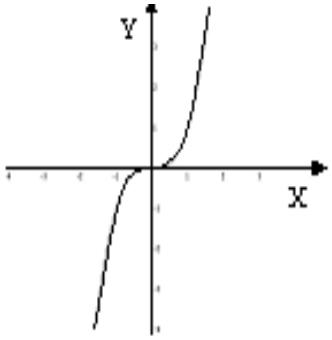


Figura 26: Funciones potenciales de exponente par



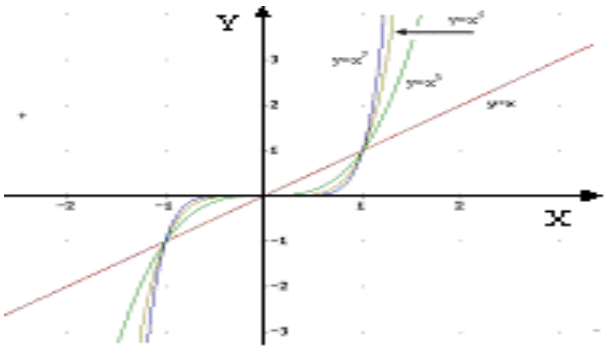
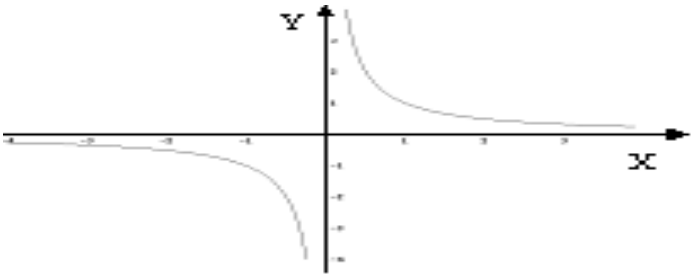


Figura 27: Funciones potenciales de exponente impar



$y=x^{-1}$

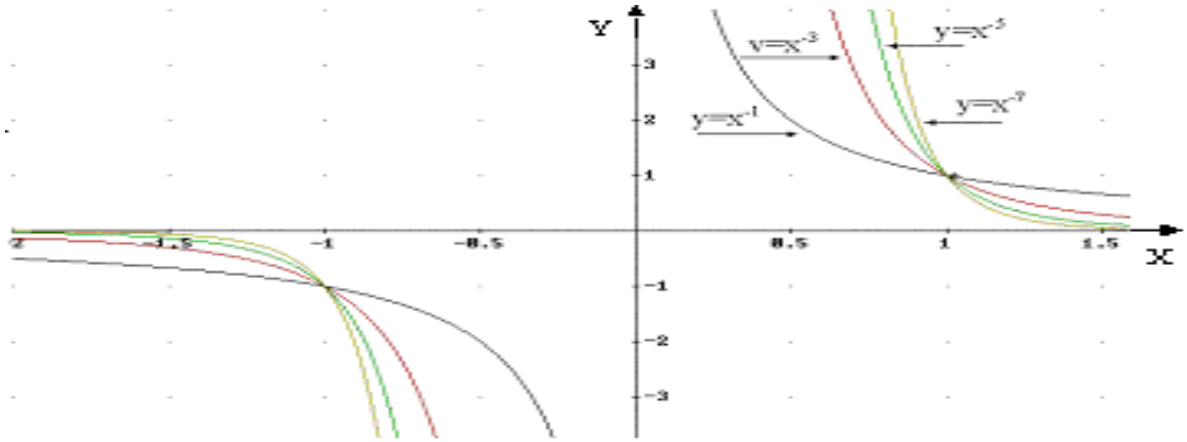
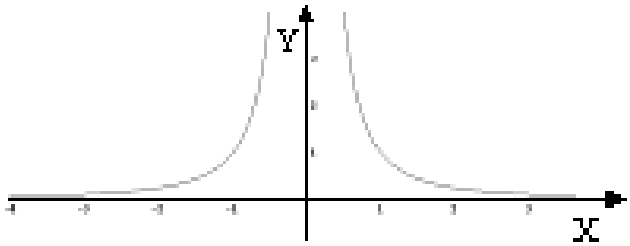


Figura 28: Funciones potenciales de exponente impar negativo



$y=x^{-2}$

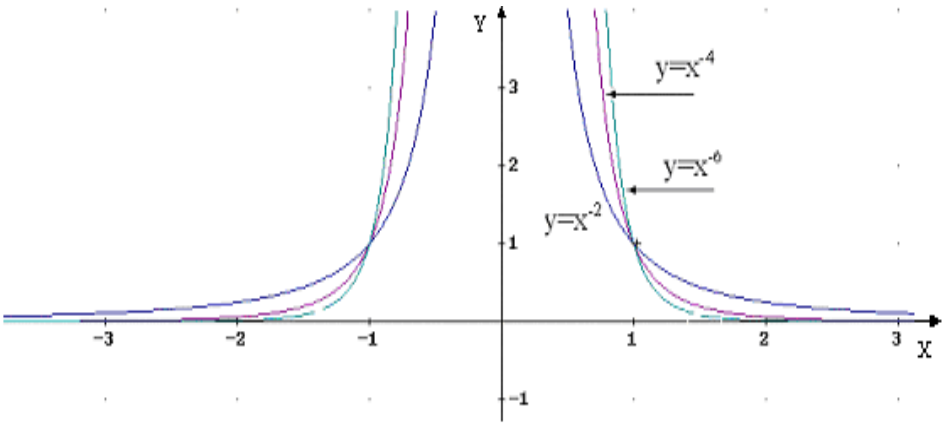


Figura 29: Funciones potenciales de exponente par negativo

8) Dilatación: Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice <u>dilatada</u> si |a| > 1(a >1 ó a < -1). Su representación gráfica se "separa" del eje de las abscisas a partir del gráfico de la función f.

Ejemplo: La función y=2x es dilatada con relación a y=x al igual que $y=3x^2$ con relación a $y=x^2$

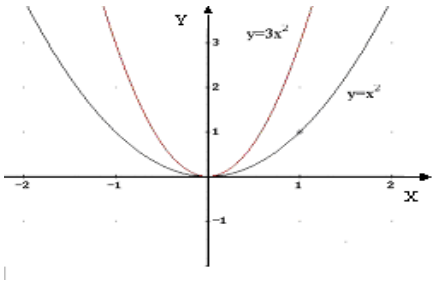


Figura 30: Dilatación

9) Contracción: Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice contraída si |a| < 1 (-1< a < 1). Su representación gráfica se "aproxima" al eje de las abscisas a partir del gráfico de la función f.

Ejemplo: $y = \frac{1}{4} x^2$ es contraída con relación a $y=x^2$

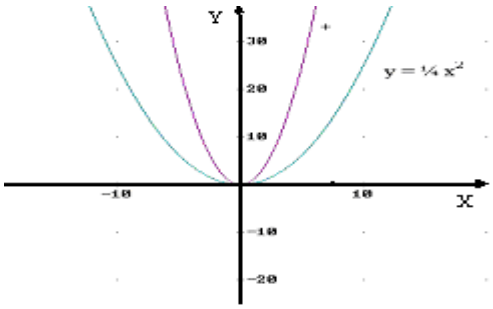


Figura 31: Contracción

10) Reflexión: Una función g del tipo g(x) = a f(x) se dice reflejada en el eje de las "x" si a < 0. Su representación gráfica sufre una simetría axial con respecto al gráfico de la función –a f(x), tomando como eje de simetría el eje de las abscisas.

Ejemplo: La función $y=-x^2$ es reflejada respecto a la función $y=x^2$

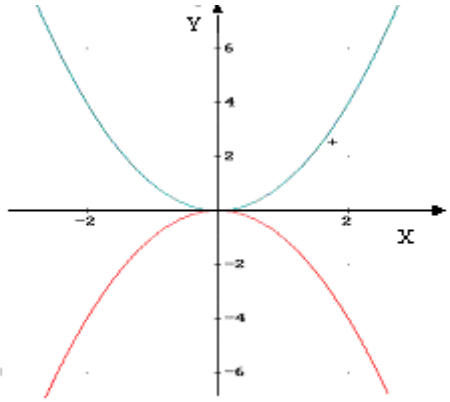


Figura 32: Reflexión

11) Traslación: El gráfico de una función g del tipo g(x) = [f(x – d)] + e se obtiene a partir del gráfico de la función f trasladándolo |d| unidades en la dirección del eje de las "x", "hacia la derecha" si d < 0 y "hacia la izquierda" si

d > 0 y |e| unidades "hacia arriba" si e > 0 y "hacia abajo" si e < 0.

Ejemplo: $g(x)=(x-1)^2 +1$ es una traslación de $f(x)=x^2$ en una unidad en la dirección del eje x hacia la derecha y en una unidad en la dirección del eje y hacia arriba.

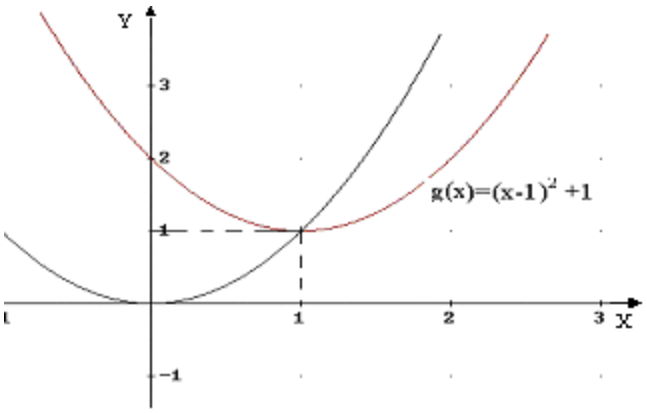


Figura 33: Traslación

12) Paridad: Una función f se dice par (impar) si los argumentos opuestos tienen la misma imagen (tienen imágenes opuestas). En símbolos:

f es par si y sólo si para todo $x \in$ Dom f, $-x \in$ Dom f se tiene que: $f(-x) = f(x)$

f es impar si y sólo si para todo $x \in$ Dom f, $-x \in$ Dom f se tiene que: $f(-x) = -f(x)$

Gráficamente, se dice que una función es par si su gráfico es axialmente simétrico respecto al eje de las ordenadas y es impar si su gráfico es centralmente simétrico respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo: $f(x)=2x^3$ es una función impar ya que para todo $x \in \Re$ se cumple que

$f(-x)=2(-x)^3=-2x^3=-f(x)$

Ejercicio propuesto 9: Analizar la paridad de las funciones siguientes:

a) $f(x)= 5x+4$

b) $g(x)= -7x^2$

c) $h(x)= x^{-3}$

Funciones racionales: Las funciones racionales son aquellas funciones elementales que pueden expresarse como cociente de dos funciones polinomiales $P(x)$ y $Q(x)$

$$Y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de una función racional está constituido por los números reales que no anulan a la función polinomial del denominador.

Ejemplo: $y=\frac{x+3}{x-1}$ es una función racional con dominio $\Re\backslash\{1\}$. En general, para representar gráficamente se realiza el cociente y se analizan las transformaciones a partir de $y=\frac{1}{x}$. Para este caso se tendría $y=\frac{x+3}{x-1}=1+\frac{4}{x-1}$, cuyo análisis nos lleva a observar que las transformaciones realizadas a la función $y=\frac{1}{x}$ son las siguientes:

- contracción de $y = \frac{1}{x}$ con a=4
- traslación en la dirección del eje x una unidad a la derecha
- traslación en la dirección del eje y una unidad hacia arriba

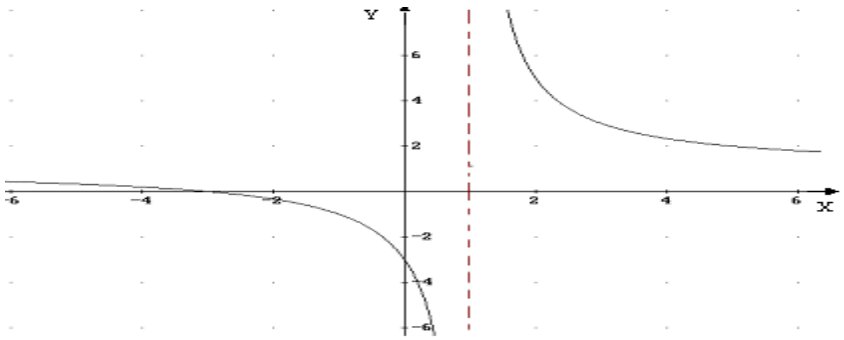


Figura 34: Paridad

Ejercicio propuesto 10: Analizar todas las propiedades estudiadas de las siguientes funciones:

$a) \; y = \frac{x-5}{x+2}$

$b) \; y = \frac{2x-1}{3x+2}$

$c) \; y = \frac{-4+x}{-7x+5}$

Funciones numéricas

Funciones fraccionarias

- Dominio:
  - Igualar a cero el (o los) denominador (es).
  - Obtener los ceros. (Resolver la ecuación que se obtiene)
  - Plantear dominio (Dom. = $\{ x \in \Re : x \neq$ ceros $\}$)
- Ceros: Igualar a cero el numerador y resolver la ecuación obtenida.
- Polos: Igualar a cero el denominador y resolver la ecuación obtenida.

Funciones con radicales

- **Dominio:** Si $f(x)=\sqrt{A}$ entonces f está definida si $A\geq 0$. Se resuelve la inecuación que se obtiene y el dominio de f será su solución.
- **Ceros: Igualar** a cero la función y resolver la ecuación que se obtiene.

Función exponencial

Las funciones de la forma $y = a^x$, con $a>0$, $a\neq 1$ se llaman exponenciales de base a. Estas funciones tienen las propiedades siguientes:

- Dominio: el conjunto de los números reales
- Imagen: los números reales positivos
- En x=0 alcanzan el valor 1
- Crecen en todo su dominio
- Para valores del dominio que tienden a $-\infty$, los valores de la imagen tienden a 0
- Para valores del dominio que tienden a $+\infty$, los valores de la imagen tienden a $+\infty$
- Cumplen todas las propiedades de las potencias de exponente real

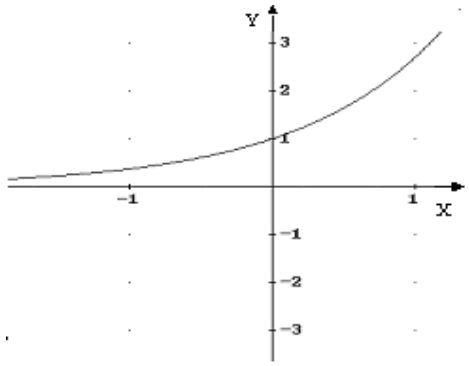


Figura 35: Dominio

Cuando la base cumple que 0<a<1, entonces estas funciones tienen las propiedades siguientes:

- Dominio: el conjunto de los números reales
- Imagen: los números reales positivos
- En x=0 alcanzan el valor 1
- Decrecen en todo su dominio
- Para valores del dominio que tienden a $-\infty$, los valores de la imagen tienden a $+\infty$
- Para valores del dominio que tienden a $+\infty$, los valores de la imagen tienden a 0

- Cumplen todas las propiedades
- s de las potencias de exponente real

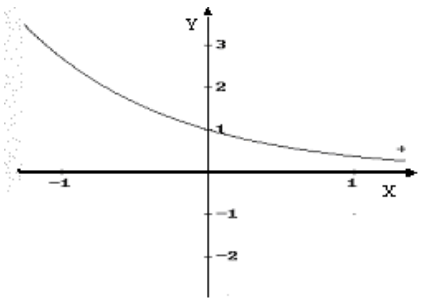


Figura 36: Dominio que tienden

Función logarítmica:

Las funciones de la forma $y = \log_a x$, con $x>0$, $a>0$, $a\neq1$ se llaman logarítmicas de base a. La relación como inversa de la función exponencial se manifiesta en la equivalencia siguiente: $y = \log_a x$ es equivalente a $x = a^y$, es decir, el logaritmo de un número es el valor al que hay que elevar la base del logaritmo para obtener el número. Resulta muy utilizado el logaritmo decimal que debe su nombre al hecho de que el valor de la base a = 10. También es conocido el logaritmo natural o neperiano, cuya base $a = e \approx 2{,}71828\ldots$

Partiendo de que las funciones logarítmicas son funciones inversas de las exponenciales resulta muy fácil obtener sus propiedades: (a>1)

- Dominio: el conjunto de los números positivos
- Imagen: los números reales
- En uno alcanzan el valor 0
- En su base alcanzan el valor 1
- Crecen en todo su dominio
- Para valores del dominio que tienden a $\underline{0^+}$, los valores de la imagen tienden a $\underline{-\infty}$
- Para valores del dominio que tienden a $\underline{+\infty}$, los valores de la imagen tienden a $\underline{+\infty}$

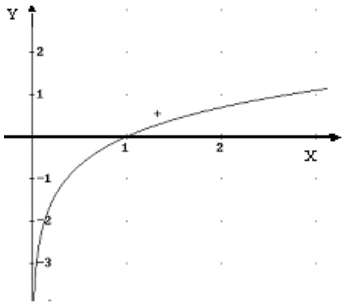


Figura 37: Función logarítmica

4.2 Representación de situaciones a través de funciones

Ejercicios propuestos:

1. Represente gráficamente las siguientes funciones en los intervalos indicados:

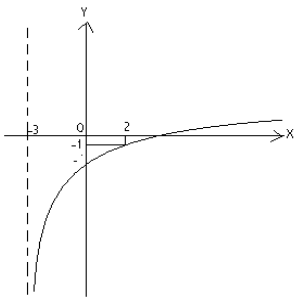
   a) $y = \sqrt[3]{x+2} - 3 \qquad x \in [-3;6)$

   b) $f(x) = \frac{2}{x-2} + 2 \qquad x \in R$

   c) $g(x) = (x-1)^3 - 1 \qquad x \in [-1;3]$

   d) $j(x) = -|x-3| + 2 \qquad x \in (-2;5]$

2. Dada la gráfica de la función $f(x) = \log_5(x+b) + c$



   a) Escriba su ecuación.

   b) Diga su dominio, imagen y Monotonía.

   c) Calcule su cero.

   d) Determine los valores de x para los cuales

   $f(x) = \log_5 \log^2(x+6) - 4$

3. Represente gráficamente y analice las propiedades de las siguientes funciones:

   a) $y = 2^{x-1} + 2 \qquad x \in [-1;3]$

   b) $y = \log_2(x+2) - 2 \qquad x \in R$

   c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 1$

   d) $g(x) = \log_{1/2}(x-2) - 2 \qquad x \in (2;6]$

4. En la tabla siguiente se muestra la cantidad de agua goteada por una llave y el tiempo transcurrido.

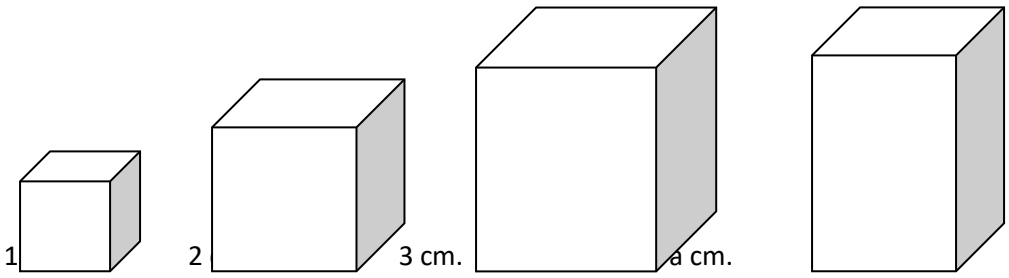
TIEMPO(MINUTOS)	NIVEL DE AGUA(CM.)
0	0
15	10
30	14
45	17
60	20

a) Forme los pares ordenados de la correspondencia establecida y represéntelos en un sistema coordenado cartesiano y una los puntos.

b) Interprete la situación a partir del análisis de la gráfica representada.

c) ¿Cuál sería la variable dependiente y cuál la independiente?

5. En las siguientes figuras aparece los cubos y el valor de la arista correspondiente:



a) Complete la siguiente tabla y obtenga la fórmula general para calcular la superficie total del cubo:

ARISTA	1	2	3	4	5	…	A
Superficie Total	6		54			…	s=

b) Determine las variables dependiente e independiente.

6. Dada la función real f que a cada número asocia el triple más uno:

a. Escriba su expresión algebraica.

b. Calcule f (1) y f (¾).

c. Halle el dominio y la imagen.

d. Analice las propiedades de inyectividad y monotonía.

7. Diga cuáles de las siguientes correspondencias son directa o inversamente proporcionales:

   a) Tiempo que se tarda en limpiar un monte y el número de personas que realizan la limpieza.

   b) Cantidad de kilogramos de naranja comprada y el precio que se paga por ellas.

   c) Tiempo que tarda un avión en hacer un recorrido y la velocidad del mismo.

8. En un bloque de viviendas, las ventanas son rectangulares y tienen una superficie de 3 m^2. Si x es la longitud del lado de la base, exprese su altura, y, en función de x. ¿Que tipo de proporcionalidad se establece entre ellos?

9. Se desea abrir un pozo de forma cilíndrica de diámetro 4 m. Exprese el volumen de agua que cabe en él en función de la profundidad, x.

10. El punto de ebullición del agua se expresa mediante la siguiente fórmula:

    t = 100 – 0,001 h donde t es la temperatura del punto de ebullición en grados centígrados del agua y h es la altura a la que se encuentra con relación al nivel del mar.

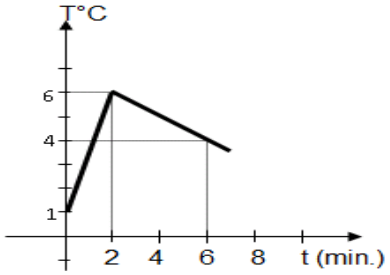
    ¿Cuál es el punto de ebullición del agua en la cima del monte Everest (8848 metros sobre el nivel del mar)?

11. Cuando un espeleólogo se pone a excavar hacia el interior de la tierra la temperatura aumenta según la fórmula siguiente:

    t = 15 + 0,001 d donde t es la temperatura alcanzada en grados centígrados y d es la profundidad, en metros, desde la corteza terrestre.

    ¿Cuántos metros hay que excavar para alcanzar una temperatura de 100^0 C?

12. La figura muestra la relación entre el tiempo y la temperatura de una sustancia.



    a) ¿Cuál fue la mayor temperatura que alcanzó la sustancia?

    b) ¿Cuál fue la temperatura inicial?

    c) ¿Durante qué tiempo la temperatura de la sustancia estuvo ascendiendo?

    d) ¿A los cuántos minutos la sustancia alcanzará los 5°C?

e) ¿Qué temperatura tendrá la sustancia a los 5 minutos y 30 segundos?

13. Exprese el área del triángulo equilátero en función del lado. ¿Qué función se obtiene? ¿Cuáles son sus propiedades? Represente dicha función.

14. En un bosque hay dispersas x casetas de guardas; cada una está unida a las restantes por caminos diferentes. Exprese el número de caminos en función de las casetas.

15. Exprese el área de un triángulo isósceles rectángulo en función del cateto.

16. Una piscina rectangular tiene dimensiones 40 por 25 metros y está rodeada por un paseo de anchura constante. Si el área del paseo es 504 m^2, encuentre la anchura del paseo.

17. Llamamos ecuación funcional real a las funciones proposicionales cuyo dominio básico son las funciones reales. Se denomina solución de una ecuación funcional a aquellas funciones que al ser sustituidas en la ecuación dada la transforman en una proposición verdadera.

18. Halle las funciones f que satisfacen la condición:

    $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$. Sugerencia haga la sustitución t = x +1.

    $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}, x \neq 0$.

19. La concentración de una muestra de penicilina puede ser determinada, colocándose una cantidad determinada k de gotas en un recipiente que contenga un cultivo de bacterias. La penicilina inhibe el crecimiento de las bacterias en una región circular cuyo diámetro y es medido. En el siguiente gráfico se muestra la relación entre la concentración $x = \log_2 k$ y el diámetro del círculo obtenido a través de la tabla 1 por el método de los mínimos cuadrados. ¿Cuál es la ecuación de la recta?

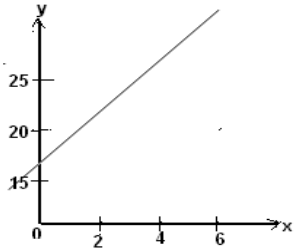


Tabla 1

$x = \log_2 k$	Y
0	15,87
1	17,78
2	19,52
3	21,35
4	23,13
5	24,77

20. Un campesino quiere construir una cerca rectangular para su perro; para ello dispone de 10 m de cerca metálica. ¿Qué dimensiones debe tener la cerca para que el área sea máxima? ¿Si se utiliza una pared de la casa cuáles serían las dimensiones si mantenemos que el área sea máxima?

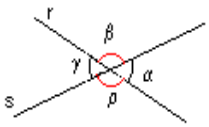
CAPÍTULO 5. GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

5.1. Geometría plana

5.1.1. Base teórica de la geometría plana

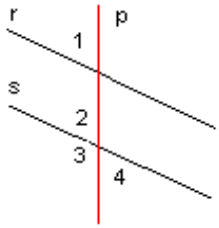
5.1.2. Ángulos y Rectas

Ángulos determinados por dos rectas que se cortan



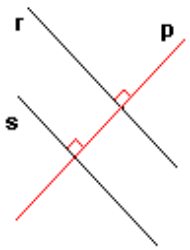
- **Ángulos adyacentes:** Dos ángulos consecutivos sobre una misma recta. Suman 180°. Ejemplo: α y β.
- **Ángulos opuestos por el vértice:** Son iguales. Ejemplo: α y γ.

Ángulos entre paralelas (r || s y p secante)



- **Ángulos correspondientes:** Están a un mismo lado de la secante y en diferente región. Son iguales. Ejemplo: $\angle 1$ y $\angle 2$.
- **Ángulos alternos:** Están a ambos lados de la secante y en la misma región. Son iguales. Ejemplo: $\angle 1$ y $\angle 4$.
- **Ángulos conjugados:** Están a un mismo lado de la secante y en la misma región. Suman 180°. Ejemplo: $\angle 1$ y $\angle 3$.

Resumen:



- Si la secante es perpendicular a las paralelas todos los ángulos que se forman son iguales.
- Si la secante no es perpendicular a las paralelas entonces:

- Todos los ángulos agudos (obtusos) que se forman son iguales.
- Los pares de ángulos formados por uno agudo y uno obtuso suman 180°.

Ángulos complementarios: Son dos ángulos cuya suma es 90°.

Ángulos suplementarios: Son dos ángulos cuya suma es 180°.

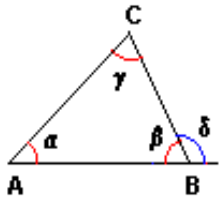
- Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos (perpendiculares), son iguales.

Distancia de un punto a una recta:

- Si desde un punto exterior a una recta se trazan una perpendicular y varias oblicuas, la perpendicular es menor que las oblicuas. La longitud del segmento de perpendicular es la distancia del punto a la recta.

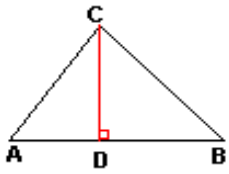
5.1.3. Triángulos

En todo triángulo se cumple:



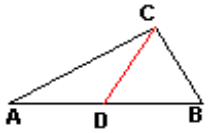
- La longitud de cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y mayor que su diferencia **(Desigualdad triangular).**
- A lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.
- La suma de los ángulos interiores es 180° .**(α+β+γ =180°)**
- Cada ángulo exterior **(δ)** es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a el. **(δ= α+γ)**

Rectas y puntos notables de un triángulo:

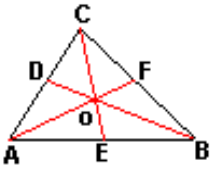


- **Alturas:** Son los segmentos de perpendiculares trazados desde los vértices hasta los lados opuestos. Las alturas se cortan en un punto llamado **ortocentr.**

$\overline{CD}$ altura sobre $\overline{AB}$: $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



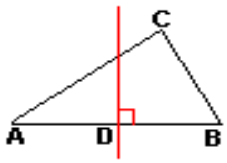
- **Medianas: Son** segmentos determinados por los vértices y el punto medio del lado opuesto. Las medianas se cortan en un punto llamado **baricentro** (centro de gravedad).



$\overline{CD}$ mediana sobre $\overline{AB}$; $\overline{AD} = \overline{DB}$

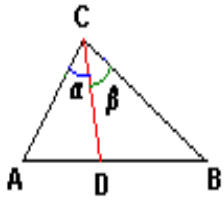
- Las medianas se cortan formando segmentos que están en la razón **2:1**.

r



- **Mediatrices:** Son las rectas que pasan por los puntos medios de los lados y son perpendiculares a estos. Las mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita)

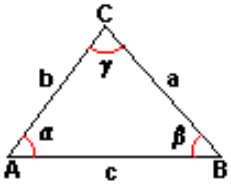
r: mediatriz de $\overline{AB}$; $\overline{AD} = \overline{DB}$



- **Bisectrices:** Los segmentos que bisecan los ángulos interiores de un triángulo comprendidos entre cada vértice y el lado opuesto. Las bisectrices se cortan en un punto llamado **incentro** (centro de la circunferencia inscrita).

$\overline{CD}$ bisectriz del $\angle$ACB; $\angle\alpha = \angle\beta$.

<u>En todo triángulo se cumple:</u>



- Ley de los senos.

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$$

R: radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

- Ley de los cosenos**.**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

<u>Paralela media de un triángulo</u>

- El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

En todo triángulo se puede calcular:

Perímetro **Semiperímetro**

$P = a + b + c$ $p = \frac{P}{2}$

Área:

$A = \frac{1}{2} b \cdot h$ ⟶ Cuando se conocen la base y la altura.

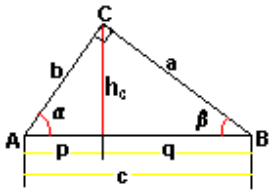
$A = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \operatorname{sen}\gamma$ ⟶ Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ⟶ Cuando se conocen los tres lados

Los triángulos según sus ángulos se clasifican en:

- **Acutángulos**: Tienen todos sus ángulos agudos.
- **Obtusángulos**: Tiene un ángulo obtuso.
- **Rectángulo**: Tiene un ángulo recto.

En todo triángulo rectángulo se cumple:



∠ACB = 90°

a y **b**: catetos.

c: hipotenusa.

h_c: altura relativa a la hipotenusa.

p y **q**: proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

R: radio de la circunferencia circunscrita.

- Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- Teorema de los catetos: $a^2 = q \cdot c$ y $b^2 = p \cdot c$
- Teorema de la altura: $h_c^2 = p \cdot q$
- $h_c = \frac{a \cdot b}{c}$
- Las alturas se cortan en el vértice del ángulo recto.
- Las mediatrices se cortan en el punto medio de la hipotenusa, por tanto, este es el circuncentro o centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, luego $R = \frac{1}{2} c$.
- La mediana relativa a la hipotenusa es la mitad de hipotenusa e igual al R.
- En todo triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo de 30°, el cateto que se opone a este es igual a la mitad de la hipotenusa.

Razones trigonométricas:

$$\text{seno} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{coseno} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \text{cotangente} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

- Área: $A = \frac{1}{2} a \cdot b$ ⟶ Si se conocen las longitudes de sus catetos.

Los triángulos según sus lados se clasifican en:

- **Escaleno:** Sus tres lados son desiguales.
- **Isósceles:** Dos lados son iguales, en consecuencia, los ángulos que se oponen a esos lados son iguales. La altura relativa a la base coincide con la bisectriz, la mediana y la mediatriz.
- **Equilátero:** Sus tres lados son iguales, en consecuencia, sus ángulos interiores son iguales, con una amplitud de 60°. Las rectas notables coinciden con respecto a cualquier lado.

En todo triángulo equilátero se cumple:

Si ***l***: lado; **h**: altura; **r**: radio de la circunferencia inscrita; **R**: radio de la circunferencia circunscrita, entonces:

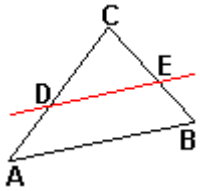
- $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ **Área:** $A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$ si se conoce el lado.
- $r = \frac{1}{3} h$ $A = \frac{\sqrt{3}}{3} h^2$ si se conoce la altura.
- $R = \frac{2}{3} h$ **Perímetro:** $P = 3 \cdot l$

Semejanza y congruencia de triángulos

Teorema fundamental de la semejanza:

- Si una recta corta a dos lados de un triángulo o a sus prolongaciones y es paralela al tercer lado, entonces se forma un triángulo que es semejante al original.

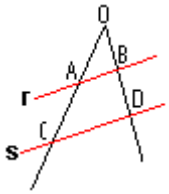
$\overline{DE} \,||\, \overline{AB} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta CDE.$



Teorema de las transversales:

- Si r || s y OA y OB transversales que se cortan en O entonces:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} \qquad \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}.$$



Criterios de semejanza de triángulos:

Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente:

- Iguales dos ángulos. **(a.a)**
- Proporcionales dos lados e igual el ángulo comprendido. **(p.a.p)**
- Proporcionales los tres lados. **(p.p.p)**

  - En dos triángulos semejantes, los lados opuestos a los ángulos respectivamente iguales se llaman lados homólogos.

Razón de semejanza: Es la razón que se establece entre dos lados homólogos de dos triángulos semejantes y se denota por **k**.

  - Si dos triángulos son semejantes entonces la razón entre los perímetros es igual a **k** y la razón entre las áreas es igual a $\mathbf{k^2}$.
  -

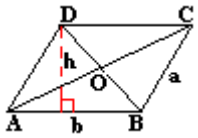
Criterios de igualdad de triángulos:

Dos triángulos son iguales si tienen respectivamente iguales:

- Un lado y los ángulos adyacentes. **(a.l.a)**
- Dos lados y el ángulo comprendido. **(l.a.l)**
- Sus tres lados. **(l.l.l)**
- Dos lados y el ángulo que se opone al mayor de estos. **(l.l.a)**

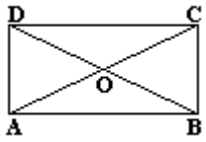
5.1.4 Cuadriláteros Convexos

Paralelogramos:



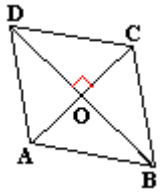
- Sus lados opuestos son paralelos e iguales.
- Sus ángulos opuestos son iguales y los consecutivos suman 180°.
- Las diagonales se cortan en su punto medio.
- Área: **A = b.h** (b: base ; h: altura)
- Perímetro: **P = 2(a+b)**.

Rectángulo:



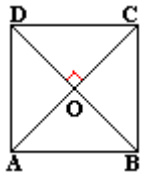
- Es un paralelogramo.
- Sus cuatros ángulos son rectos.
- Sus diagonales son iguales.

Rombo:



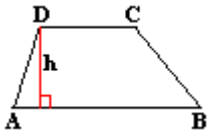
- Es un paralelogramo.
- Sus cuatro lados son iguales.
- Sus diagonales son perpendiculares y bisecan los ángulos de donde parten.
- Área: $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (d_1 y d_2 : diagonales)
- Perímetro: **P = 4.a**.

Cuadrado:



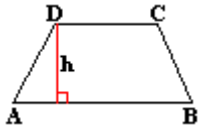
- Es un paralelogramo que a la vez es rectángulo y rombo.
- $d = \sqrt{2} \cdot a$ (d :diagonal ; a :lado)
- Área: $A = a^2$.
- Perímetro: **P = 4.a**.

Trapecio:



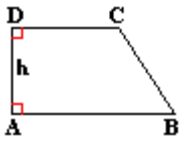
- Tiene al menos dos lados paralelos que se denominan bases.
- Área: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$ (B :base mayor; b :base menor)

Trapecio isósceles:



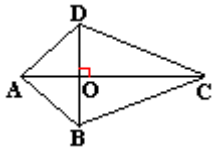
- Los lados no paralelos son iguales.

Trapecio rectángulo:



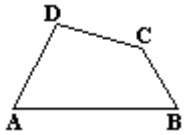
- Tiene dos ángulos rectos.

Trapezoide simétrico:



- Tiene dos pares de lados consecutivos iguales.
- Sus diagonales son perpendiculares.
- Área: $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (d_1 y d_2: diagonales)
- Perímetro: **P = 2(a+b)**.

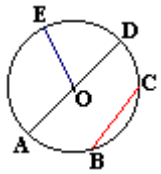
Trapezoide:



- Son cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos.

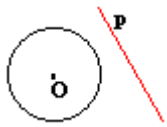
5.1.5 Circunferencia y Círculo

Circunferencia**:** Conjunto de todos los puntos del plano situados a la misma distancia de un punto fijo de dicho plano llamado centro.

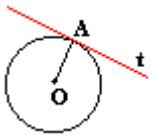


- **Radio:** Distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia.
- **Cuerda:** Todo segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia.
- **Diámetro:** Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Arco:** Cada una de las partes de la circunferencia determinada por dos puntos cualesquiera de esta.

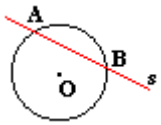
Relación de posición entre una circunferencia y una recta:



- La recta es ***exterior*** a la circunferencia si no tiene puntos comunes con esta.
- La recta es ***tangente*** a la circunferencia si tiene un solo punto común con esta.

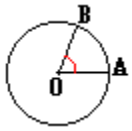


- El punto común a la recta y la circunferencia recibe el nombre ***de punto de tangencia***.
- La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que tiene como extremo el punto de tangencia.

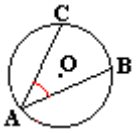


- La recta es ***<u>secante</u>*** a la circunferencia si tiene dos puntos comunes con esta.

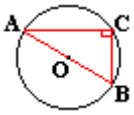
<u>Ángulos en la circunferencia</u>:



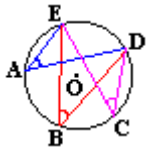
- **Ángulo central:** Tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son radios.



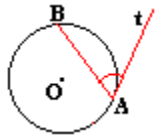
- **Ángulo inscrito:** Tiene su vértice en un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas.



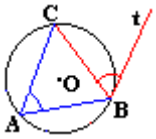
- Si un ángulo inscrito en una circunferencia le corresponde un arco que es una semicircunferencia, entonces es un ángulo recto (**Teorema de Thales**).



- Los ángulos inscritos en una circunferencia a los cuales le corresponde el mismo arco son iguales.
- La amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la amplitud de arco correspondiente.



- **Ángulo seminscrito**: Tiene su vértice en un punto de la circunferencia, uno de sus lados es cuerda y el otro tangente a la circunferencia.

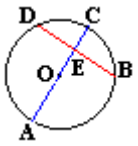


- Los ángulos inscritos y seminscritos en una circunferencia a los cuales le corresponde el mismo arco son iguales.

<u>Relaciones entre ángulos centrales, arcos y cuerdas:</u>

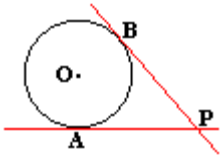
- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a ángulos centrales iguales corresponden arcos iguales y viceversa.
- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a ángulos centrales (arcos) iguales corresponden cuerdas iguales y viceversa.

- En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, a mayor cuerda corresponde mayor arco.



- Si un diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces divide a la cuerda y al arco correspondiente en dos partes iguales.

$\overline{BD} \perp \overline{AC} \quad \therefore \quad \overline{DE} = \overline{EB}$ y $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$



- Si dos rectas que se cortan en un punto **P** son tangentes a una circunferencia entonces **P** de los puntos de tangencia.

$\overline{PA} = \overline{PB}$

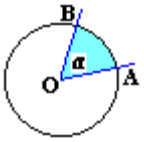
Cálculo en la circunferencia**:**

- El radio es la mitad de diámetro: $r = \frac{d}{2}$
- Longitud de la circunferencia: $l = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Círculo: El conjunto formado por todos los puntos de una circunferencia y sus puntos interiores.

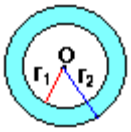
- Área del círculo: $A_c = \pi \cdot r^2$

Sector circular: La parte del círculo limitado por un arco y los lados de ángulo central correspondiente.



- Área del sector circular: $A_{sc} = \frac{A_c}{360^o} \cdot \alpha$

Anillo circular: La porción del plano limitada por dos circunferencias concéntricas, incluyendo estas.



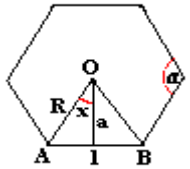
- Área del anillo circular: $A = A_{c_2} - A_{c_1}$

5.1.5. Polígonos regulares

Polígonos regulares**:** Son los polígonos que tienen todos sus lados y todos sus ángulos iguales.

- En un polígono regular si se trazan los radios de la circunferencia circunscrita, este se descompone en triángulos isósceles, por eso la resolución de un polígono regular se reduce a la resolución de un triángulo isósceles.

Elementos de un polígono regular:



n: número de lados.

l: longitud del lado.

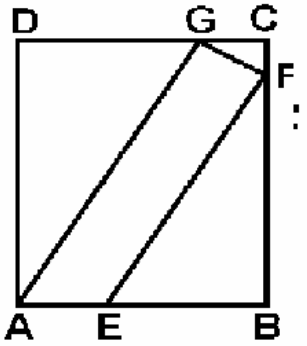
R: radio de la circunferencia circunscrita.

a: apotema (radio de la circunferencia inscrita).

$x = \frac{180°}{n}$ $\alpha = \frac{180°(n-2)}{n}$

- Área de un polígono regular: A = p.a (p: semiperímetro)

A continuación, veamos algunos ejercicios donde se aplican los principales conocimientos acerca de la geometría plana.



Ejercicio resuelto 1 En el rectángulo ABCD los puntos E, F y G pertenecen a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente tal que $\overline{AG} \perp \overline{GF}$, $\overline{AG} // \overline{EF}$, $\angle CFG = 30°$, $\overline{AD} = 4\sqrt{3}cm$ y $\overline{GC} = \sqrt{3}cm$

Halla:

a) La amplitud de los ángulos DAG y FEB.

b) El perímetro del trapezoide ABFG.

c) El área del cuadrilátero AEFG.

Solución:

a) En la figura se tiene que ∠DAG = ∠CGF = 30° por ser ángulos agudos con sus lados respectivamente perpendiculares. Por tanto, el ángulo GAE = 60° por complementario, luego $\angle FEB = 60°$ por correspondiente con ∠ GAE y ser $\overline{AG} // \overline{EF}$.

b) En el triángulo FCG se tiene que:

$\cos 30° = \frac{\overline{GC}}{\overline{GF}} = \frac{\sqrt{3}}{\overline{GF}}$, de donde se obtiene que: $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\overline{GF}}$ obteniendo que $\overline{GF} = 2cm$ y además se cumple que $\overline{FC} = 1{,}0cm$ por la propiedad del ángulo de 30° en un triángulo rectángulo. En el triángulo DAG rectángulo en D y con ángulo de 30° se cumple que: $\overline{AG} = 2\overline{DG}$ y aplicando el Teorema de Pitágoras en el mismo tenemos que:

$\overline{AG}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DG}^2$, $\overline{AG}^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AG}}{2}\right)^2$

$\overline{AG}^2 = 48 + \frac{\overline{AG}^2}{4}$; $\frac{3\overline{AG}^2}{4} = 48$; $3\overline{AG}^2 = 192$; $\overline{AG}^2 = 64$, o sea que

$\overline{AG} = 8{,}0cm$, por tanto $\overline{DG} = 4{,}0cm$

$P_{ABFG} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FG} + \overline{AG} = 4 + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 1 + 2 + 8 = 13 + 5\sqrt{3} \approx 13 + 5 \bullet 1{,}73$

$P_{ABFG} \approx 13 + 8{,}65 \approx 21{,}65cm$

c) $A_{AEFG} = A_{ABCD} - (A_{EBF} + A_{FCG} + A_{ADG})$. Calculemos cada una de estas áreas.

$A_{ABCD} = \overline{AB} \bullet \overline{BC} = \left(4 + \sqrt{3}\right) \bullet 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} + 12 \approx 16 \bullet 1{,}73 + 12 \approx 27{,}68 + 12$

$A_{ABCD} \approx 39{,}68cm^2$

$A_{EBF} = \frac{\overline{EB} \bullet \overline{BF}}{2}$ En este caso debemos calcular el valor $\overline{EB}$ en el triángulo rectángulo EBF, pero $\tan \angle FEB = \frac{\overline{BF}}{\overline{EB}}$, o sea que, $\overline{EB} = \frac{\overline{BF}}{\tan 60°} = \frac{4\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$ y racionalizando se obtiene que:

$\overline{EB} = 4 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 4 - 0{,}58 \approx 3{,}42cm$

$\overline{BF} = 4\sqrt{3} - 1 \approx 4 \bullet 1{,}73 - 1 \approx 6{,}92 - 1 \approx 5{,}92cm$

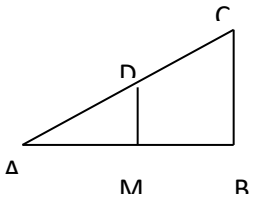
Por tanto: $A_{EBF} \approx \frac{3{,}42 \bullet 5{,}92}{2} \approx \frac{20{,}24}{2} \approx 10{,}12cm^2$

$A_{FDG} = \frac{\overline{FC} \bullet \overline{CG}}{2} = \frac{1 \bullet \sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}73}{2} \approx 0{,}86cm^2$

$A_{ADG} = \frac{\overline{AD} \bullet \overline{DG}}{2} = \frac{4\sqrt{3} \bullet 4}{2} = 8\sqrt{3} \approx 8 \bullet 1{,}73 \approx 13{,}84cm^2$ Sustituyendo los valores

$A_{AEFG} \approx 39{,}68 - (3{,}42 + 0{,}86 + 13{,}84) \approx 39{,}68 - 18{,}12 \approx 21{,}56cm^2$

<u>Ejercicios resueltos:</u> Los ejercicios que se resuelven a continuación corresponden a pruebas de ingresos de años anteriores.



1. En la figura:

ABC rectángulo en B

D pertenece al segmento AC

M es el pie de la perpendicular trazada desde D hasta AB

a) Pruebe que $\Delta ABC \sim \Delta ADM$ y escriba la proporcionalidad entre sus lados homólogos.

b) Si sabemos que AB = 9,0cm y AC = 15 cm. y el área del AMD es 13 cm^2, calcula la longitud de BC y el área del cuadrilátero MBCD.

Solución:

a) Como el triángulo ABC es rectángulo en B y $\overline{DM} \perp \overline{AB}$, entonces se puede afirmar que: $\overline{DM} \,||\, \overline{AB}$ y por tanto por el teorema fundamental de semejanza se cumple que: $\Delta ABC \sim \Delta ADM$ y por ser semejantes los triángulos se obtiene que:

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DM}}$ por elementos homólogos.

b) Por datos se conoce que el triángulo ABC es rectángulo en B, por tanto aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene que:

$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$

$\overline{BC}^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$

$\overline{BC} = \sqrt{144}$

$\overline{BC} = 12cm$

$A_{MBCD} = A_{ABC} - A_{AMD} = \frac{\overline{AB} \bullet \overline{BC}}{2} - 13 = \frac{9 \bullet 12}{2} - 13 = 54 - 13$

A_{MBCD} = 41 cm^2.

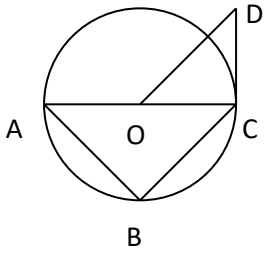
2. En la circunferencia de centro O

y diámetro AC, B punto de la circunferencia,

CB $\| \|$ OD, OC $\perp$ DC

a) Pruebe que ΔABC y ΔOCD son semejantes

b) Si OD = 13 cm. y CD = 5,0 cm. Calcule el área del círculo.



Solución:

a) En los triángulos ABC y OCD se tiene que:

$\angle$ ABC = 90° por estar inscripto en el diámetro

$\angle$ OCD = 90° por ser OC $\perp$ DC por tanto $\angle$ ABC = $\angle$ OCD = 90°

Como CB $\| \|$ OD, entonces $\angle$ ACB = $\angle$ COD por alternos entre paralelas

Por tanto se puede afirmar que: $\Delta ABC \sim \Delta OCD$ por tener dos de sus ángulos respectivamente iguales.

b) Como el triángulo OCD es rectángulo en C aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que: $\overline{OC}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{DC}^2$ = 13^2 - 5^2 = 169 – 25 = 144, o sea que:

$\overline{OC} = 12cm$

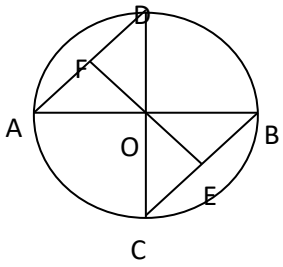
$A_{\text{círculo}} = \pi \bullet \overline{OC}^2 = 3{,}14 \bullet 144$ = 452,16 cm^2

3. A, B. C y D puntos de la circunferencia de centro O y radio r = 4, 0 cm.

AD $||$ CB y EF$\perp$AD

a) Demuestre que ΔBEO = ΔDFO

b) Calcule el área del ΔDFO si AD = 6,4cm



Solución:

a) En los triángulos BEO y DFO se tiene que:

$\overline{OB} = \overline{OD}$ Por ser radios de una circunferencia.

$\angle$ OBE = $\angle$ ODF por estar inscriptos en el mismo arco de circunferencia.

Como AD $||$ CB y EF$\perp$AD, entonces se puede afirmar que:

$\angle$ OEB = $\angle$ OED = 90° y por tanto $\angle$ BOE = $\angle$ DOE por terceros ángulos en los triángulos luego se obtiene que: ΔBEO = ΔDFO por tener un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

b) En el triángulo AOD se cumple que: $\overline{OA} = \overline{OD}$ por ser radios de la circunferencia por tanto el triángulo AOD es isósceles de base $\overline{AD}$ y como EF$\perp$AD, entonces E es punto medio de $\overline{AD}$, de donde se obtiene que $\overline{DF} = 3{,}2cm$. Aplicando Pitágoras en el triángulo ODF se obtiene que:

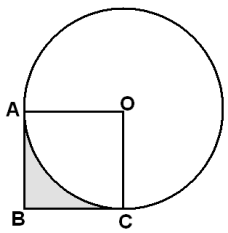
$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{DE}^2 = 4^2 - (3{,}2)^2 = 16 - 10{,}24 = 5{,}76$

$\overline{OE} = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4cm.$

Pero $A_{DFO} = \dfrac{\overline{OE} \bullet \overline{DE}}{2} = \dfrac{2{,}4 \bullet 3{,}2}{2} = \dfrac{7{,}68}{2} = 3{,}84cm^2$

Ejercicios propuestos:

1. En la figura: los puntos *A* y *C* pertenecen a la cir1unferencia de centro *O* y de longitud 25,12 *cm.* ABCD es un cuadrado. Calcula el área de la superficie sombreada.



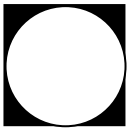
2. En la figura se tiene una circunferencia inscrita en un cuadrado de lado L. Sí *L* = 5.0 cm. El área sombreada será:

a) --4.5 cm^2

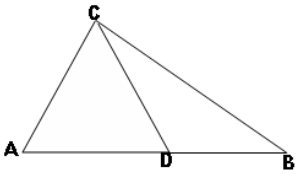
b) --6.0 cm.

c) --5.4 cm.

d) -- No sé



3. Un triángulo equilátero *ADC*. En la semirrecta $\overline{DA}$ se elige un punto B, tal que $\overline{BD} = \overline{AC}$. Demuestra que el triángulo *ABC* es rectángulo



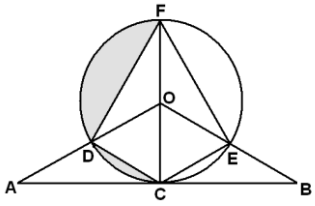
4. Una circunferencia de centro E y diámetro $\overline{DC}$, se ha trazado $\overline{AB}$, tangente en el punto M, de modo tal que $\overline{AB} \,||\, \overline{DC}$. $\overline{DM}$ y $\overline{MC}$ son bisectrices respectivas de los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BCD$. Demuestra que el cuadrilátero ABCD es un rectángulo.

5. En la figura: $\overline{AB}$ es tangente en el punto *C* de la circunferencia de centro *O* y radio 2,0 cm. *D, E* y *F* puntos de la circunferencia. Si $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ y

$\angle DFC$ =30º

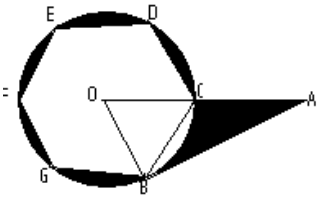
a) Probar que $\overline{CE} = \overline{OF}$.

b) Halla el área de la región sombreada.



7. En la circunferencia de centro O se ha inscrito un exágono regular, $\overline{AB}$ tangente a la circunferencia en B, $\overline{OA}$ = 12 cm.

Calcula el área sombreada.

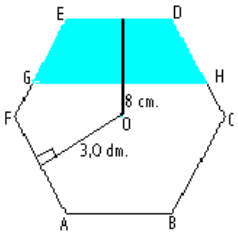


7. Se tienen 2 circunferencias secantes de las cuales se conoce que la cuerda común a ambas es lado de un triángulo equilátero inscrito en una de ellas y lado de un cuadrado inscrito en la otra circunferencia. Si sabemos que el radio del círculo donde está inscrito el triángulo es de 3,0 dm. Hallar:

a) El área de la figura constituida por el triángulo y el cuadrado.

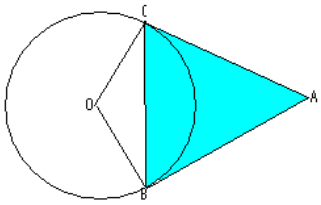
b) El área de la superficie común a los dos círculos.

8. En la figura se tiene que ABCDEF es un exágono regular. Determine el área de la figura que se obtiene al retirar la figura sombreada.



9. De un trapecio isósceles sabemos que sus bases miden 30 y 50 cm. respectivamente. Si los lados no paralelos forman con la base menor un ángulo de 120°. Calcula su área.

10. En la figura AB y BC son tangentes a la circunferencia de centro O y radio OB=100 cm. Hallar el área de la región sombreada.



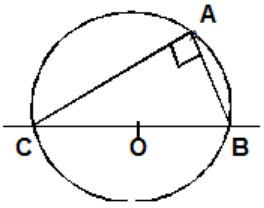
11. El lado de un pentágono regular es de 4,8dm. Halla el radio de la circunferencia circunscrita, la apotema y el área del pentágono.

12. La diferencia entre las áreas de un exágono regular y de un cuadrado, inscritos en una misma circunferencia es de 24,0 dm². ¿Cuál es el área del círculo?

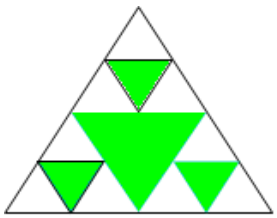
13. Sea ABCDEF un hexágono regular de 2,0 dm de lado. Uniendo los puntos medios de sus lados se forma el hexágono LMNPQR. Hallar el área comprendida entre los dos hexágonos.

14. El radio de una circunferencia inscrita de un nonágono (9 lados) regular es de 3,4 cm. Calcular la longitud del lado, el radio de la circunferencia circunscrita y el área del polígono.

15. En un terreno circular con centro en o el diámetro mide 50 m y la cuerda AB = 30m. Calcular el área del triángulo inscrito en el terreno circular.



16. Se quiere construir un parque con cuatro jardineras (áreas sombreadas) como se muestra en la figura. Todos los triángulos son equiláteros y las longitudes de los lados son 800, 400 y 200 metros respectivamente. Calcule el área total destinada a jardineras y la longitud de la malla de alambre para su protección.

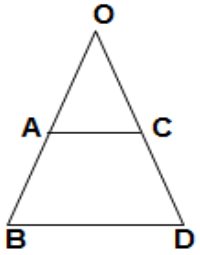


17. En el triángulo OBD, $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{BD}$, A y C son puntos de $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ respectivamente. Se sabe que:

$\overline{OA}$ **= (2x+1) cm**

$\overline{OB}$ **=14 cm**

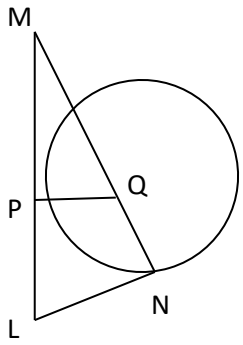
$\overline{OC}$ = 2xcm



$\overline{OD}$ =12 cm Si $\overline{AC}$ = 4,0 cm, entonces $\overline{BD}$ mide:

a) --- 9,3cm b) --- 24,5cm c) ---8,0cm 2 d) ----8,0cm

18. En la circunferencia representada, $\overline{LM}$ y $\overline{LN}$ son tangentes en los puntos *P* y *N* respectivamente. Marque con una *X* las proposiciones verdaderas:



a). Los triángulos *MPQ* y *MLN* no son semejantes.

b).Los ángulos $\angle QPM$ y $\angle LNM$ son suplementarios.

c). Los ángulos $\angle QPM$ y $\angle LNM$ son iguales.

d). Se cumple que $A_{MPQ} / A_{MLN} = K^2$

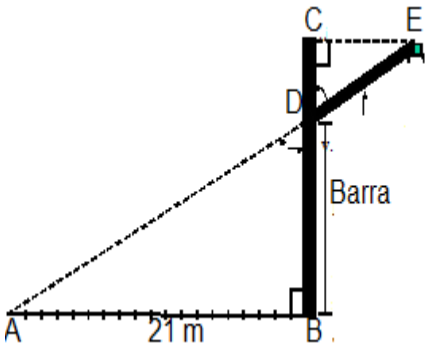
19. Clasifica en V o F las siguientes proposiciones.

- ----En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la suma de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.
- ----Si se conocen las longitudes de dos lados de un triángulo, es posible calcular el tercer lado aplicando el teorema de Pitágoras.
- ----Si en un triángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados, es igual a la longitud del tercero, podemos asegurar que el triángulo es rectángulo.
- ----En todo triángulo, el mayor de sus lados es la hipotenusa y los dos restantes son catetos.

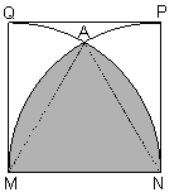
20. El extremo superior de una pared se observa con un ángulo de elevación de 56 grados a una distancia de 6,0 m y con un ángulo de 44grados a una distancia de 8,0m. Si el ojo del observador está a 1,0 m del piso, entonces la pared tiene una altura de:

a) --- 25 m b) --- 4√3m c) --- 10m d) --- 5√3m e) --- no se puede determinar.

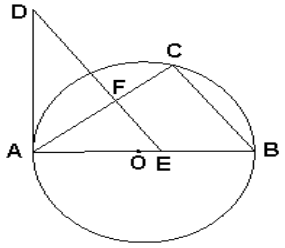
21. En una torre de 30m, se ha colocado una barra que soporta una lámpara a una altura de 20m. Por razones de seguridad se tiene que colocar un cable Œ, como lo indica la figura. Calcular la longitud de dicho cable.



22. En el cuadrado MNPQ con centro en M y N se trazan los arcos NQ y MP de radios $\overline{MN} = 4{,}2\ \text{cm}$ respectivamente. Calcula el área sombreada.

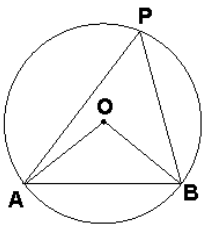


23. Haciendo centro en un vértice de un triángulo equilátero de 4,0 cm de lado se trazó una circunferencia de radio igual a la distancia del vértice al centro de gravedad del triángulo. Calcula el área de la figura así formada.

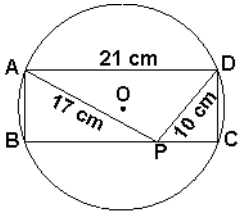


24. Los puntos A, B y P pertenecen a la circunferencia de centro en O y radio $r = \overline{OB}$. La amplitud del $\angle$APB supera en 6,0° la del $\angle$OAB y $\overline{AB} = 40\ \text{cm}$. Calcula el área del ΔAOB.

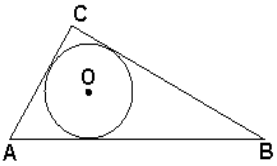
25. El ΔABC es rectángulo e isósceles. El punto interior P, dista 1,0 cm y 5,0 cm de cada cateto y su distancia hasta la hipotenusa AB es igual a la quinta parte de la hipotenusa. Calcula el área del ΔABC.



26. El rectángulo ABCD está inscrito en la circunferencia con centro en O. Las dimensiones de los lados del ΔAPD se dan en la figura y $P \in \overline{BC}$. Calcula la longitud de la circunferencia.



27. La circunferencia de centro O y radio r = 1,0 dm está inscrita en el ΔABC, rectángulo en C. Calcula el área del ΔABC conociendo que $\overline{AB} = 6{,}0\ \text{cm}$.

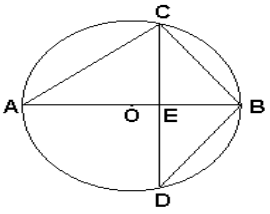


28. En la figura, $E \in \overline{AB}$ y es el punto medio de la cuerda $\overline{CD}$ en la circunferencia de centro O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{AE} = 9{,}0\ \text{cm}$ y $\overline{CD} = 12\ \text{cm}$.

Halla:

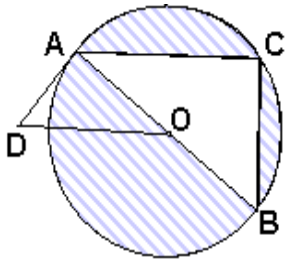
a) La amplitud de los ángulos CBE y CDB.

b) El área del círculo de centro O y diámetro $\overline{AB}$.



Igualdad y semejanza de triángulos

28. En la figura, C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{AD}$ es tangente a la circunferencia, $E \in \overline{AB}$, $\overline{ED} \,//\, \overline{CB}$, $\overline{AC} \cap \overline{DE} = \{F\}$ y $\overline{AE} = \overline{CB}$.



28.1. Prueba que:

a) $\overline{ED} = \overline{AB}$

b) $\Delta ABC \sim \Delta AFD$

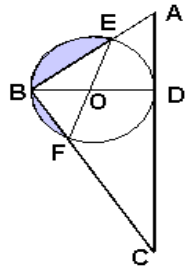
28.2 Halla $\overline{DF}$ si $\overline{BC} = 6{,}0\,cm$, $\overline{AC} = 8{,}0\,cm$ y $\overline{AF} = 5{,}0\,cm$.

29. En la figura, C es un punto de la circunferencia de centro en O y diámetro $\overline{AB}$. $\overline{DA}$ es tangente y $\overline{OD} \,//\, \overline{AC}$.

a) Prueba que $\Delta ABC \sim \Delta OAD$ y $\overline{OD} \cdot \overline{AC} = 2r^2$.

b) Halla el área de la región rayada, conociendo que $\overline{OD} = 5{,}0\,cm$ y $\overline{OD} = 8{,}0\,cm$.

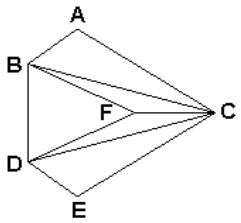
30. En la figura, $\overline{EF}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de la circunferencia de centro O. $\overline{AC}$ es tangente en D, los puntos B, F y C están alineados, al igual que B, E y A.



a) Demuestra que: $\Delta BCD \sim \Delta ABD$.

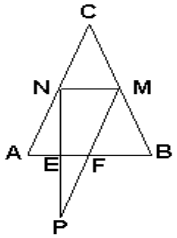
b) Calcula el área sombreada si: $\overline{AD} = 2\sqrt{3}\,cm$ y $\angle ACB = 30^0$.

31. En la figura, el triángulo BDF es isósceles de base $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ bisectriz del $\angle ACE$, $\angle BFC = \angle DFC$ y $\overline{AC} = \overline{CE}$.



Prueba que $\overline{AB} = \overline{DE}$

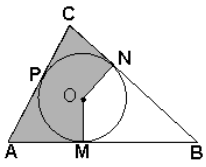
32. En la figura, $\overline{MN}$ es una paralela media del ΔABC, isósceles de base $\overline{AB}$. F es el punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{NP}$ mediatriz de $\overline{AF}$ y M, F y P puntos alineados.



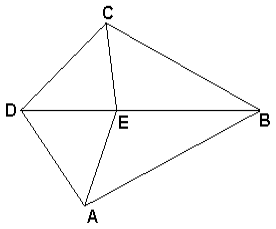
a) Prueba que: $\Delta MNP \sim \Delta AEN$ y $\Delta MCN = \Delta BMF$.

b) Halla el área del ΔAEN, conociendo que $\angle P = 30^0$ y $\overline{AB} = 8{,}0\,cm$.

33. El punto O es el incentro en el triángulo ABC. M, N y P son los puntos de tangencia de los lados del triángulo con la circunferencia. Calcula el área sombreada y la longitud de la circunferencia inscrita, conociendo que: $\overline{AC} = 7{,}2\ cm$, $\overline{AM} = 5{,}4\ cm$ y $\angle ABC = 53{,}1^0$.



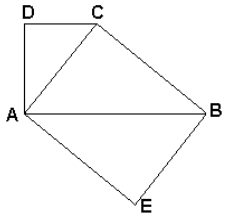
34. En el cuadrilátero ABCD, $\overline{CE}$ es la bisectriz del $\angle BCD$. El ΔAED es isósceles de base $\overline{AD}$, $\angle BCD = \angle BEA$ y $E \in \overline{DB}$.



a) Prueba que $\angle DBC = \angle ABE$.

b) ¿Cuál debe ser la posición de un punto F, sobre el lado $\overline{AB}$, de manera que $\Delta DAC = \Delta DAF$?

35. En la figura, ABCD es un trapecio rectángulo en A y D. AEBC es un rectángulo, $\overline{AB} = 9{,}0$ cm y $\overline{DC} = 4{,}0$ cm. Halla el área del rectángulo AEBC y la del triángulo ACD.



5.2 Trigonometría

Las funciones trigonométricas: La función que asocia a cada número real x el valor y = sen x se llama función seno de x. Esta función tiene las propiedades siguientes:

- Dominio: los números reales
- Imagen: el intervalo [-1,1]
- Es periódica, es decir, sus valores se repiten lo que se expresa por sen(x+2π)=senx. El periodo es 2π. Por ello sus propiedades se estudian en el intervalo [0, 2π]
- Ceros en x = nπ, n∈N
- Valor máximo que alcanza: y=1 en $x = \frac{\pi}{2}$ (en el intervalo [0, 2π])
- Valor mínimo que alcanza: y= -1 en $x = \frac{3\pi}{2}$ (en el intervalo [0, 2π]):
- Simétrica respecto del origen, es decir, sen(-x)=- sen x para todo ,-x ∈Domf (ℜ)
- Crece por intervalos. En el intervalo que se analiza crece en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
- Decrece por intervalos. En el intervalo que se analiza decrece en $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

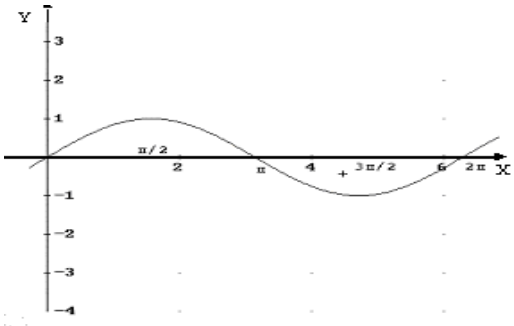


Figura 38: Trigonométrica

La función que asocia a cada número real x el valor y = cos x se llama función coseno de x. Esta función tiene las propiedades siguientes:

- Dominio: los números reales
- Imagen: el intervalo [-1,1]
- Es periódica, es decir, sus valores se repiten lo que se expresa por cos (x+2π)=cos x. El periodo es 2π. Por ello sus propiedades se estudian en el intervalo [0, 2π]
- Ceros en x = (2n+1) π/2, n∈N
- Valor máximo que alcanza: y=1 en x = 0 (en el intervalo [0, 2π]:
- Valor mínimo que alcanza: y= -1 en $X = \pi$ (en el intervalo [0, 2π])
- Simétrica respecto del eje de ordenadas, es decir, cos(-x)= cos x
- Crece por intervalos. En el intervalo que se analiza crece en $[\pi, 2\pi]$
- Decrece por intervalos. En el intervalo que se analiza en $[0, \pi]$

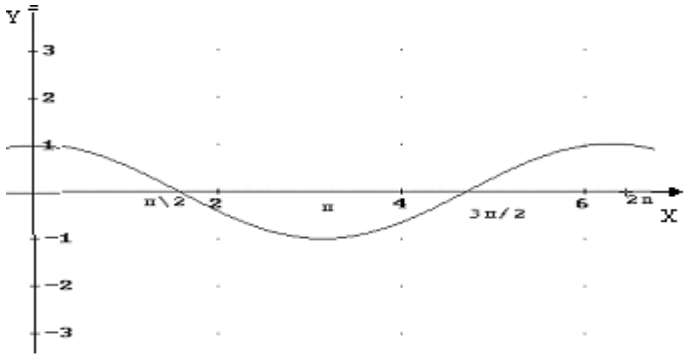


Figura 39: El intervalo [-1,1]

Al representar ambas funciones en un mismo sistema coordenado cartesiano se puede observar que coinciden en valores al realizar una traslación de una cualquiera de ellas.

La función que asocia a cada número real x el valor $y = \tan x = \frac{senx}{\cos x}, \quad con \quad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n \in N$ se llama función tangente de x. Esta función tiene las propiedades siguientes:

- Dominio: $\Re$\{x: x=(2n+1) π/2. Así, por ejemplo, en el intervalo [0, 2π] la función está definida en [0, π/2[;] π/2, 3π/2 [y] 3π/2, 2π]
- Imagen: el intervalo [-∞,+∞]
- Es periódica, es decir, sus valores se repiten. El periodo es π.
- Posee polos en los puntos x = (2n+1) π/2, n∈$\mathbb{Z}$

- Creciente en todo su dominio

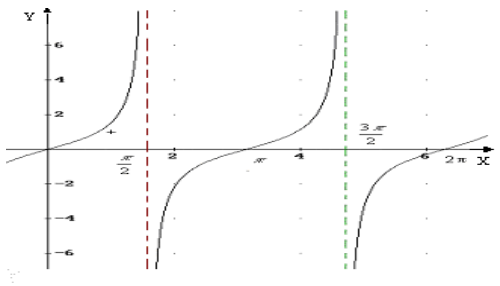


Figura 40: el intervalo [-∞,+∞]

Fórmulas de reducción y signos de cada función trigonométrica en cada cuadrante

Cuadrante I α	Cuadrante II $\pi - \alpha$	Cuadrante III $\pi + \alpha$	Cuadrante IV $2\pi - \alpha$
$\operatorname{sen}\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$	$-\operatorname{sen}\alpha$
$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tan\alpha$	$-tan\alpha$	$tan\alpha$	$-tan\alpha$
$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$

Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad tanx \cdot \cot x = 1 \qquad tanx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad 1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad tan2x = \frac{2tanx}{1 - tan^2 x}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \qquad tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\alpha \pm tan\beta}{1 \mp tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Demostrar identidades trigonométricas

- Iniciar la demostración por el miembro que te da más posibilidades para transformar. Si no puedes decidirte, aplica el procedimiento de trabajar en ambos miembros. (Atiende a la reversibilidad de los pasos)
- Si es posible, utiliza la descomposición factorial o simplifica.
- Si no se te ocurre un camino para empezar a transformar, reduce todas las funciones trigonométricas a senos y cosenos.
- Ten cuidado de comprobar que todas las transformaciones son válidas en el dominio de la identidad.

Resolver ecuaciones trigonométricas

- Transformar la ecuación en función de una sola razón trigonométrica.
- Resolver la ecuación que se obtenga. (Reducir la ecuación a una de la forma: senx=a; cosx=b o tanx=c)
- Reconocer signo de la razón trigonométrica en cada cuadrante.
- Buscar soluciones en los diferentes cuadrantes según el signo de la razón trigonométrica, teniendo en cuenta las fórmulas de reducción.
- Plantear el conjunto solución sin olvidar los ángulos coterminales con las soluciones en el intervalo principal.

Ejemplo resuelto 1:

1. Hallar el conjunto solución de la siguiente ecuación. $\frac{\cos 2x}{senx}+\cot x=\frac{1}{sen(-x)}$ Con $\left(x\neq k\pi\right),\ k\in Z$

Solución:

$\frac{\cos^2 x-sen^2 x}{senx}+\frac{\cos x}{senx}=-\frac{1}{senx}$ Transformando con el empleo de identidades trigonométricas conocidas.

$\frac{\cos^2 x-sen^2 x}{senx}+\frac{\cos x}{senx}+\frac{1}{senx}=0$ Igualando a cero.

$\frac{\cos^2 x-(1-\cos^2 x)+\cos x+1}{senx}=0$ Hallando el m.c.m. de los denominadores y ampliando los numeradores, así como la identidad fundamental.

$\cos^2 x-1+\cos^2 x+\cos x+1=0$. Estamos en presencia de una ecuación cuadrática.

$2\cos^2 x+\cos x=0$. Reduciendo términos semejantes.

$\cos x(2\cos x+1)=0$. Descomponiendo en factores según la ecuación cuadrática.

$\cos x = 0$ ó $2cox + 1 = 0$. Ecuaciones lineales asociadas.

$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ (Solución en el II y III cuadrante)

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ $x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

Se obtiene la solución para cada una de las ecuaciones lineales planteando el conjunto solución siguiente:

S= $\left\{ \begin{array}{l} x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad k \in Z \\ \\ x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\,, \quad x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right\}$

Ejemplo resuelto 2: Demostrar la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable.

$$1 - \tan 2x \bullet \frac{1}{\cot(-x)} = \frac{1}{\cos 2x}$$

M.I.: $1 - \tan 2x \bullet \frac{1}{\cot(-x)} = 1 - \frac{sen2x}{\cos 2x} \bullet (-\frac{senx}{\cos x}) = 1 + \frac{2senx\cos x}{1 - 2sen^2 x} \bullet \frac{senx}{\cos x}$ Empleando las identidades trigonométricas conocidas,

$= \frac{1 - 2sen^2 x + 2sen^2 x}{1 - 2sen^2 x} = \frac{1}{1 - 2sen^2 x} = \frac{1}{\cos 2x}$ Determinando denominador común, ampliando los numeradores y reduciendo términos semejantes,

M.D.: $\frac{1}{\cos 2x}$ Comparando M.I. = M.D. l.q.q.d.

Ejercicios resueltos: Estos ejercicios corresponden a diferentes pruebas de ingreso de años anteriores donde se ha evaluado esta temática.

a). Resuelva la ecuación:

cos 2x - 1/2 cosx + sen^2x = 0 para $0 \leq x \leq 2\pi$

Solución:

$2\cos^2 x - 1 - 1/2\cos x + (1 - \cos^2 x) = 0$ Sustituyendo con las identidades fundamentales.

$2\cos^2 x - 1 - 1/2\cos x + 1 - \cos^2 x = 0$. Multiplicando por 2 y reduciendo términos semejantes obtenemos:

$2\cos^2 x - \cos x = 0$; $\cos x(2\cos x - 1) = 0$, es decir que:

$\cos x = 0$ ó $2\cos x - 1 = 0$ de donde $\cos x = \frac{1}{2}$ de la primera condición obtenemos las soluciones: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ mientras que de la segunda condición obtenemos los valores: $x_3 = \frac{\pi}{3}$ y $x_4 = \frac{5\pi}{3}$

b). Resuelve la siguiente ecuación:

$\cos 2x - 3\cos x + sen^2 x = -2$

Solución:

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + (1 - \cos^2 x) + 2 = 0$

$2\cos^2 x - 1 - 3\cos x + 1 - \cos^2 x + 2 = 0$

$\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

$(\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$. De esta expresión podemos plantear que:

$\cos x = 1$ ó $\cos x = 2$ (No tiene solución ya que $-1 \le \cos x \le 1$)

Logrando como solución: $x = 2k\pi$ con $k \in Z$

c). Halla los valores de **x** para los cuales las funciones f(x) = 3 - 3 $\cos^2 x$ y g(x) = 10 senx - 7 alcanzan el mismo valor.

Solución:

Las funciones alcanzan el mismo valor cuando:

$3 - 3\cos^2 x = 10 sen x - 7$ y al resolver esta ecuación se obtiene:

$3 - 3(1 - sen^2 x) - 10 sen x + 7 = 0$

$3 - 3 + 3sen^2 x - 10 sen x + 7 = 0$, reduciendo términos semejantes

$3sen^2 x - 10 sen x + 7 = 0$. Descomponiendo en factores

$(3sen x - 1)(sen x - 7) = 0$, de la cual se logra que:

$sen x = \frac{1}{3}$ ó $sen x = 7$ ((No tiene solución ya que $-1 \le sen x \le 1$)

Por tanto podemos afirmar que las funciones se cortan cuando $senx = \frac{1}{3}$, la cual tiene solución si x_1 = 19,5°+k.360° y en x_2 = 160,5° + k.360°

d). Halla todos los pares **(x; y) con $0 \leq x \leq \pi/2$; $\pi/2 \leq y \leq \pi$** que satisfacen el sistema

y- 2x = 0

seny - cosy = 1

Solución:

Para resolver dicho sistema despejemos y en la primera ecuación, o sea que

y =2x, y al sustituir este valor en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación

trigonométrica: $sen2x - \cos 2x = 1$

$$2senx.\cos x - (2\cos^2 x - 1) - 1 = 0$$

$$2senx.\cos x - 2\cos^2 x + 1 - 1 = 0$$

$$2senx.\cos x - 2\cos^2 x = 0$$

$2\cos x(senx - \cos x) = 0$. Se obtienen las ecuaciones:

$2\cos x = 0$ ó $senx - \cos x = 0$, de la primera ecuación se obtiene que:

$x_1 = \frac{\pi}{2}$, según el dominio dado para x, por tanto $y_1 = \pi$. De la segunda ecuación se cumple que: $senx - \cos x = 0$, si y sólo si $senx = \cos x$, y esto sólo se logra si $x_2 = \frac{\pi}{4}$, de donde $y_2 = \frac{\pi}{2}$.

Por tanto, la solución del sistema es:

$$S = \left\{\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right), \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

e). Demuestra la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable:

$$\frac{\cos 2x + 2\cos x + 1}{\cos x(\cos x + 1)} = 2$$

Solución:

MI $\frac{\cos 2x + 2\cos x + 1}{\cos x(\cos x + 1)} = \frac{2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1}{\cos x(\cos x + 1)} = \frac{2\cos^2 x + 2\cos x}{\cos x(\cos x + 1)} = \frac{2\cos x(\cos x + 1)}{\cos x(\cos x + 1)} = 2$

MD = 2

De donde MI = MD l.q.q.d.

f). Dada la igualdad $\frac{A^2+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}=A\cot x$

1. Demuestre que para A = 1 la igualdad que se obtiene es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

2. En la igualdad toda considera A = ½ y resuelve la ecuación obtenida.

Solución:

Para A = 1 y sustituyendo en la igualdad se obtiene que:

$\frac{1+\cos 2x}{sen2x}=\cot x$. Comprobemos que se trata de una identidad.

MI $\frac{1+\cos 2x}{sen2x}=\frac{1+2\cos^2 x-1}{2senx.\cos x}=\frac{2\cos^2 x}{2senx.\cos x}=\frac{\cos x}{senx}=\cot x$

MD: cotx, es decir que MI = MD l.q.q.d.

Ejercicios propuestos:

1. Calcula $\sqrt[3]{\frac{sen(-880^o)}{cos 250^o}}$

2. Comprueba que:

a) $\frac{cos(90^o-\alpha)-3sen(180^o+\alpha)}{3cos(360^o-\alpha)+sen(90^o-\alpha)}=tan\alpha$.

b). $\frac{cos(-120^o)+tan150}{sen240^o-cos900^o}=\frac{-7\sqrt{3}-12}{3}$

3. Sean: $f(x)=\frac{13-10\cos 2x+\cos 4x}{2-\cos 2x}$ y $g(x)=-2(\cos 2x-3)$

a) Determine para qué valores de x real no está definida la expresión f(x).

b) Demuestra que para los valores admisibles de la variable f(x) = g(x) es una identidad.

4. Hllar todos los números reales que son solución de la ecuación

$\frac{3\cos^2 x}{1+senx}=1+\cos 2x$

5. Sea $A(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x+senx}$ y $B(x)=\frac{(\cos x-senx)^2+sen2x}{1-\cos^2 x}$

a) Reduce A(x) y B(x)

b) Prueba que $A(x) \bullet B(x) = \dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1+sen x}{sen^2 x}$

6. Determina para qué valores de $x \in [0;2\pi]$ se cumple:

$2sen2x \bullet \cot x - \cos 2x = 5\cos x - 1$

7. Halle los valores de **x ($0 \le x \le \pi$)** que satisfacen la ecuación:

$\log_{(sen x - \cos x)}(\cos 2x - sen2x + 7\cos x + 5) = 2$

8. Demuestre la siguiente identidad para los valores admisibles de la variable:

$$\frac{\cos(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha + \cos(\alpha-\beta)}{sen(\alpha+\beta) - 2sen\alpha + sen(\alpha-\beta)} = \cot\alpha$$

9. Demuestre que: $$\frac{2sen^2 x \bullet sen2x + sen2x(1+\cos 2x)}{2(1+\cos 2x)} = \tan x$$

10. Demuestre que la siguiente igualdad es una identidad para todos los valores admisibles de la variable.

a) $\dfrac{2\cos 2x + sen\pi}{sen2x - 2sen^2 x} - sen\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\tan(180° + x)}$

b) $\dfrac{4\cos^2 x + 1 + \cos 2x}{sen360° - 3sen2x} = \cot(\pi - x)$

11. Resuelve: $2sen2x \bullet \cot x - 5(\cos x + 1) = \cos 2x - \cos 360°$

12. Hallar el conjunto solución sabiendo que $x \in [0;2\pi]$

$\dfrac{1}{2} sen2x \bullet \cot x + sen x - 2\cos 180° = 3sen^2 x + \cos 2x$

13. Sea la expresión $A = \dfrac{sen2x - 3\cos x}{\cos 2x + sen x - 1}$

a) Determine para qué valores reales de la variable está definida la expresión A.

b) Sabiendo que $x = -\frac{5\pi}{3}$ calcular el valor numérico de A – 1

14. Halla la abscisa x (0 < x < π/2) del punto donde se cortan los gráficos de las funciones dadas por las ecuaciones: $f(x) = \sqrt{10 + \frac{9}{2}\cos x}$ y $g(x) = 3 + \cos x$

15. Sea $f(x) = \frac{1 + sen Ax}{\cos Ax}$ y $g(x) = \frac{A - 1 + \tan x}{A - 1 - \tan x}$

a) Demuestre que si A=2, la igualdad f(x)=g(x) es una identidad para todos los valores admisibles de la variable x.

b) Considera A=1 y resuelve la ecuación f(x) = -1.

16. Dos autos salen al mismo tiempo de un mismo punto siguiendo vías rectilíneas que forman entre si un ángulo de 30°. Uno de ellos lleva una velocidad de 70 km/h y el otro 80 km/h. ¿A qué distancia se encontrarán los autos al cabo de 30 minutos?

17. Enlaza la columna A con la columna B según corresponda:

Columna A	Columna B
a) $3^{sen^2 x} \bullet 3^{\cos^2 x}$	___ $2^{sen\,2x}$
b) $\left(\frac{sen x}{\cos x}\right)^2$	___ $\cot x \quad (x \neq k\pi), k \in Z$
c) $\left(4^{sen x}\right)^{\cos x}$	___ $\frac{1}{4}$
d) $(\tan x)^{-1}$	___ 3
e) $\frac{4^{\cos^2 x}}{2}$	___ $2^{\cos 2x}$
f) $25^{\log_5 \cos 60°}$	___ $\tan^2 x \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$

18. Selecciona las alternativas correctas, si es necesario realizar cálculos déjelos indicados en la hoja.

I. La solución de la ecuación: sen2x – senx = 0, con $(0° \leq x \leq 360°)$

a) __ {0°; 180°; 360°} b) __ {60°; 300°} c) __ {0°; 60°; 180°; 300°; 360°}

d) __ {0; π}

19. Completa la siguiente tabla:

	$\pi - \alpha$		$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$
Sen		$-sen\alpha$		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	$-cos\alpha$		$cos\alpha$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
Tan			$-tan\alpha$		1	
		$cot\alpha$		$\sqrt{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$

20. Di si son verdaderas (V) o falsas (F) las siguientes proposiciones. Fundamente en caso de falsas.

a) __ Para cualquier valor real de x se cumple que sen (-x) = - senx.

b) __ Los ángulos del segundo cuadrante responden a la fórmula 180° +α, con $\alpha \in$ I Cuadrante.

c) __ Siempre se cumple que $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sen\alpha$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

d) __ En el III cuadrante los valores trigonométricos de todas las funciones trigonométricas son positivos.

e) __ El cos 315° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

21. Halla el conjunto solución de las siguientes ecuaciones en el intervalo indicado en cada caso.

a) $\frac{\cos^2 x}{senx} - senx = 1$ $x \in [0°; 360°]$

b) $2sen^3 x - \cos 2x = senx$

c) $2\cos 2x + sen^2 x = \cos^2 x - \cos x$

d) $\frac{3\cos^2 x}{1+sen x} = 1+\cos 2x$

e) $3^{\cos 2x} : 9^{\frac{senx}{2}} = 1$

f) $\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{\tan x}{2} = 1$

g) $sen^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2} = 0$ ($0 \le x \le 360°$)

h) $2\cot x.sen2x + \cos x = 3 - 2sen^2 x$

i) $\cos 2x + sen2x + \cos(90^0 - \alpha) = senx - 1$

j) $\cos 2x + 3senx - 2 = 0$

k) $2\cot x.\cos x = \frac{sen2x}{senx}$ $x \in [0;2\pi]$

l) $2sen2x.\cot x - 5(\cos x + 1) = \cos 2x - \cos 360^0$

m) $\frac{-2-\cos 2x}{sen2x} + \frac{senx}{2\cos x} = 1$ $x \in [0°;360°]$

22. Determine los valores de x para los cuales se cumple:

a) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{senx} = 2senx - \frac{1}{sen(\pi - x)}$)

b) $sen(x + 30^0) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \cos 2x + 1$ $x \in (0;3\frac{\pi}{2})$

23. Calcule y simplifique.

a) $\frac{\left[sen(360^0 - \alpha).sen(-\alpha) - sen(\frac{\pi}{2} - \alpha).\cos(-\alpha)\right].\tan 765^0}{sen\alpha.\cos(2\pi - \alpha)\left[\cot^2\frac{\pi}{4} - 2sen(-\frac{\pi}{6})\right]}$

b) $\left[\tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) - sen(-\alpha)\right].\left[\frac{2}{\cos^2(-\alpha)} + \frac{1}{\cos(2\pi - \alpha)}\right]$

24. Resuelve.

a) $\frac{1-\cos 2x}{sen2x} - \cot(-x) = \cot(\frac{\pi}{2})$

b) $2sen2x + sen(-x) = \cos(2\pi - x).\tan x \qquad X \in [0;2\pi]$

c) $\frac{1}{2} sen2x.\cot x + 3senx - 2\cos 180° = 3sen^2 x + \cos 2x$

d) $25^{\cos 2x}.5^{sen^2 x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos x - \cos^2 x}$

e) $4^{sen2x.\tan x} : 2^{-\cos 2x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+sen(-x)}$

f) $4^{\tan x.sen2x}.\sqrt[3]{2}^{3\cos 2x} = 2^{7senx} : 4$

g) $\sqrt{1+4\cos^2 x} - \frac{sen2x}{\cos x} = 1 \qquad x \in \left(\frac{\pi}{2} \le x \le 3\frac{\pi}{2}\right)$

25. Dadas las expresiones: A=2sen2x , M=cotx , O=cos2x y R=5cosx-1. Determine para qué valores de $x \in [0;2\pi]$ se cumple:

A·M-O=R

26. Sean las funciones definidas por f(x)= $\frac{sen2x}{\cos x} + 1$ y g(x)=$\cos^2 x$ .Halla las abscisas de los puntos de los puntos de intersección de los gráficos de f y g.

27. Halla el conjunto solución de la siguiente ecuación en el intervalo $\left[0;3\frac{\pi}{2}\right]$.

$4\left[sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2 - 2\cos^4 x - 2\log_{25} 5 = 2(1 - sen^2 x)^2$

28. Resuelve, para 0≤X≤2π la ecuación.

$\sqrt{3}^{\log(sen^2 X + 3)} \bullet 3^{\log 4 + senx} = 3^{\log(8 + \cos^2 x)}$

Determina para qué valores de $x \in [0;2\pi]$ se cumple:

$2sen2x \bullet \cot x - \cos 2x = 5\cos x - 1$

Ejercicios correspondientes a identidades trigonométricas.

29. Enlace la columna A con la columna B según corresponda:

Columna A Columna B

a) sen 2 α ____ sen x cos y +cos x sen y

b) 1+ tan ² α ____ sen x

c) cot α ____ 1

d) sen ² A + cos ² A ____ $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, k∈Z

e) cos (x-y) ____ 2senα . cosα

f) sen (x+y) ____ $\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}$ $\alpha \neq k\pi, k \in Z$

g) sen(-x) ____ cos x. cos y + sen x sen y

30. La expresión cos 2x es igual a :

a) _____ 2 sen x cos x b)_____ 2 cos x c)_____ 1-sen^{2}x

d) _____ 2 cos^2 x+1 e) _____ ninguna de las anteriores

31. La función tan(x-y) se puede expresar como:

a) _____ tan x-tan y b) _____ $\frac{\tan x - \tan y}{1+\tan x \tan y}$ c) _____ $\frac{senx}{seny}$

d) _____ ninguna de las anteriores

32. Demuestre que las siguientes igualdades son identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $\sqrt{2}sen(45° - 2b) + 2sen^2 b = (\cos b - senb)^2$

b) $\frac{sen2x}{2-2sen^2 x} + \cot x = \frac{2}{sen2x}$

c) $\frac{senx + sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{sen(\pi - x)} + \frac{senx + \cos x}{\cos(\pi + x)} = 2\cot 2x$

d) $\cot 2\alpha + \frac{sen^2\alpha - 1}{sen2\alpha} = -\frac{1}{2}\tan\alpha$

33. Pruebe que:

$$\frac{4\cos^2 30° - sen^2\pi \tan 240°}{3\cot^2 150° - 2\cos^2 \frac{5\pi}{4}} + \frac{\cos^2(-330°)}{16 sen^2 \frac{5\pi}{6}} = \frac{9}{16}$$

34. Dada la expresión M= $\frac{senx - sen(\frac{\pi}{2} - x).sen2x}{\cos 2x}$

a. Determine los valores de x para los cuales se indefine la expresión M.
b. Pruebe qué M + sen x=0 para todos los valores admisibles de la variable.

35. Demuestre que las siguientes igualdades son identidades para los valores admisibles de la variable.

a) $\frac{sen^3 x - \cos^3 x}{\cos(\pi - x)\left[sen\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sen2x\right]} = 1 - \tan x$

b) $\frac{4\cos^2 x + 1 + \cos 2x}{sen360° - 3sen2x} = \cot(\pi - x)$

c) $\frac{2\cos 2x + sen180°}{sen2x - 2sen^2 x} - sen\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\tan(\pi + x)}$

d) $\frac{sen2x + 1 - \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \cot x + 1$

36. Sabiendo que para los valores admisibles de la variable es una identidad

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha + \cos(\alpha - \beta)}{sen(\alpha + \beta) - 2sen\alpha + sen(\alpha - \beta)} = A$$

a. Marque la respuesta correcta con una X. El valor de A es:

a) ___A=1 b)_____A= $\cot\alpha$ c)_____A=N/S

37. Sean: $A(x) = \frac{\cos 2x}{\cos x + senx}$ $B(x) = \frac{(\cos x - senx)^2 + sen2x}{1 - \cos^2 x}$

a) Reduce A(x) y B(x)

b) Prueba que A(x)*B(x)= $\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1 + senx}{sen^2 x}$

38. Dadas las funciones: $h(x)=\dfrac{sen^2}{\tan x+sen(\pi-x)}$ m(x)=1+sen$\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$. Prueba que para los valores admisibles de la variable se cumple que $h(x)*m(x)=\dfrac{sen2x}{2}$

39. Dada las funciones $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\tan x$ $g(x)=\dfrac{1}{senx-1}$ $x\neq(2K+1)\dfrac{\pi}{2}$. Demuestre que para los valores admisibles de la variable se cumple que:

a) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\cos x$ b) Calcule f($\dfrac{-5\pi}{3}$)

39. Conociendo que: $m(x)=\left[\dfrac{1}{\cos(-x)}\right]^2+\left[\dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}\right]^2$ y $g(x)\left[\dfrac{2}{sen2x}\right]^2$ .Demuestre que para los valores admisibles de la variable se cumple que: m(x)=n(x).

40. Sea f(x)= 3-tan^2 x y g(x)= $\dfrac{\cos 2x+sen2x\cot x}{1-sen^2x}$

a) Calcule g$\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Determine el dominio de g(x)

c) Demuestre que para los valores admisibles de la variable se cumple que: f(x)=g(x).

5.3 Geometría del espacio

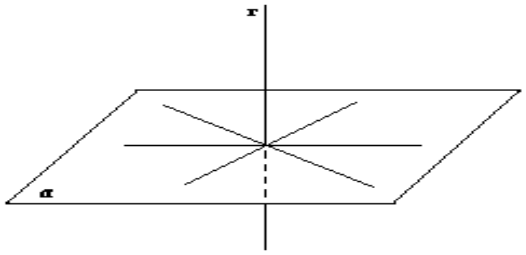
5.3.1 Base teórica de la geometría del espacio

Relación de posición de rectas en el espacio:

- Las rectas están en plano y entonces:
  - se cortan
  - son paralelas.
- Las rectas no están el plano y entonces no se cortan. En este caso se dice que se cruzan o son alabeadas.

Perpendicularidad entre recta y plano:

- Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular al menos a dos rectas del plano.
- Si una recta r es perpendicular a un plano α entonces es perpendicular a todas las rectas del plano que pasan por su pie.



- Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblicuas a un plano, la perpendicular es menor que las oblicuas.

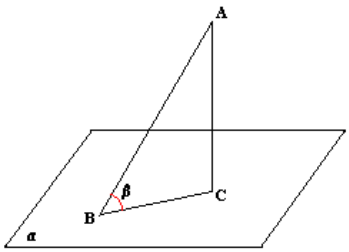
Distancia de un punto a un plano:

Es la longitud del segmento de perpendicular comprendido entre el punto y el plano.

Proyección de una oblicua sobre un plano:

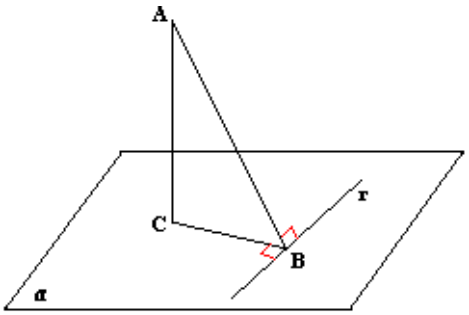
- Llamamos **proyección de una oblicua** $\overline{AB}$ sobre un plano α al segmento $\overline{BC}$ que une el pie de oblicua con el pie de la perpendicular bajada desde el mismo punto al plano.

- Llamamos **ángulo entre una oblicua** $\overline{AB}$ **y un plano** α**,** al ángulo β formado por la oblicua y su proyección sobre α**.**



Teorema de las tres perpendiculares:

Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua al plano es perpendicular a la proyección de la oblicua, entonces es perpendicular a la oblicua. El recíproco de este teorema también se cumple.

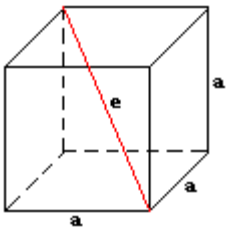


Recíproco del Teorema de las tres perpendiculares:

Si una recta de un plano que pasa por el pie de una oblicua es perpendicular a la oblicua, entonces es perpendicular a su proyección.

CUERPOS GEOMÉTRICOS

Cubo



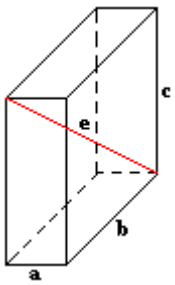
$$V = a^3$$

$$A_T = 6a^2$$

$$A_L = 4a^2$$

$$e = \sqrt{3} \cdot a$$

Ortoedro



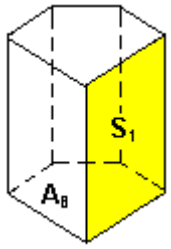
$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

$$A_L = 2(ac + bc)$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Prisma

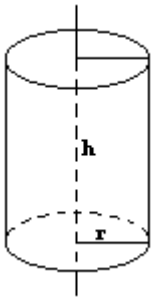


$$V = A_B \cdot h$$

$$A_T = 2A_B + A_L$$

$$A_L = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

Cilindro circular

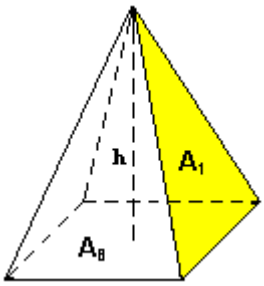


$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$A_T = 2\pi r(r + h)$$

$$A_L = 2\pi rh$$

Pirámide

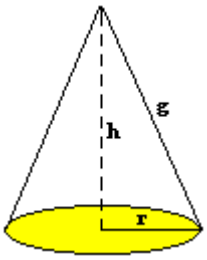


$$V = \tfrac{1}{3} A_B \cdot h$$

$$A_T = A_B + A_L$$

$$A_L = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

Cono circular

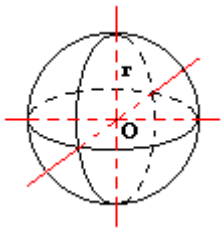


$$V = \tfrac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$A_T = \pi r(r+g)$$

$$A_L = \pi r g$$

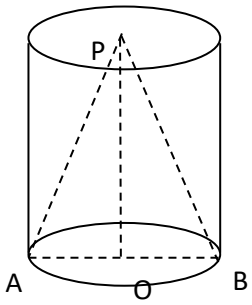
Esfera



$$V = \tfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

$$A_T = 4\pi \cdot r^2$$

Ejercicios resueltos:



Ejercicio correspondiente a la prueba de ingreso 2007-2008. Primera convocatoria

1.- En la figura se tiene un cilindro circular recto donde O y P representan los centros de los círculos bases. AB diámetro de la circunferencia de centro O, $\overline{BP} = 15\,cm$ y $sen\angle OPB = \frac{3}{5}$.

a) Calcula el área total del cilindro.

b) Si al cilindro se le hace una perforación y se le extrae el cono de diámetro AB y altura OP, halla el volumen del cuerpo resultante.

Solución:

a) Sabemos que: $A_T = 2\pi r(r+h)$ Por lo tanto al trabajar en el triángulo OPB del cual se sabe que es rectángulo en O por un cilindro circular recto y ser O y P los centros de los círculos bases.

Como $sen\angle OPB = \frac{r}{\overline{BP}} = \frac{3}{5}$, entonces $r = \frac{\overline{BP} \bullet 3}{5} = \frac{15 \bullet 3}{5} = 9{,}0cm.$ Aplicando Pitágoras en dicho triángulo se obtiene que:

$\overline{OP^2} = \overline{BP^2} - r^2$; $\overline{OP}^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$, de donde $\overline{OP} = 12cm.$

Luego sustituyendo en la formula se obtiene

$A_T = 2\pi r(r+h) \approx 2 \bullet 3{,}14 \bullet 9(9+12)$

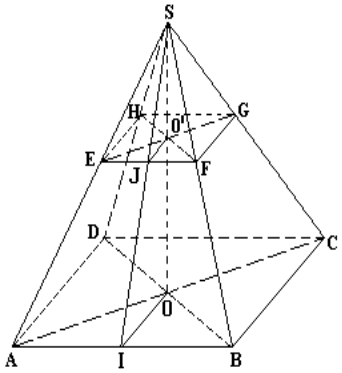
$A_T \approx 6{,}28 \bullet 9 \bullet 21 \approx 1186{,}92 cm^2 \approx 11{,}9 dm^2$

b) $V_{RESULTANTE} = V_{CILINDRO} - V_{CONO}$

$$V_{RESULTANTE} = \pi \bullet r^2 \bullet h - \frac{\pi \bullet r^2 \bullet h}{3} = \frac{2\pi \bullet r^2 \bullet h}{3} \approx \frac{2 \bullet 3{,}14 \bullet 9^2 \bullet 12}{3}$$

$$V_{RESULTANTE} \approx \frac{6{,}28 \bullet 81 \bullet 12}{3} \approx 6{,}28 \bullet 81 \bullet 4 \approx 2034{,}72 cm^3 \approx 2{,}03 dm^3$$

Ejercicio correspondiente a la Prueba de ingreso del 2007-2008. Segunda Convocatoria. (Cuba)



2.- La figura muestra una pirámide regular SABCD de base cuadrada y altura $\overline{SO}$, la cual ha sido cortada por el plano EFGH paralelo a su base. O y O' puntos de intersección de las diagonales de los cuadrados ABCD y EFGH respectivamente. S, O', O, puntos alineados.

La altura del triángulo ABS referida al lado $\overline{AB}$, es $\overline{SI}$=15 cm. $\overline{SI}$ corta a $\overline{EF}$ en J.

La altura de la pirámide SEFGH es

$\overline{SO'}$ = 4,0 cm y $\angle$ JSO' = $36{,}9^0$.

a) Halla el volumen de la pirámide SEFGH.

b) Halla al área total de la pirámide truncada ABCDEFGH.

Solución:

a) En la figura se cumple que: Si $\overline{SO'}$ = 4,0 cm. Es la altura de la pirámide. Entonces, el triángulo SJO' es rectángulo en O' y como el ángulo

JSO' =36,9º, se puede plantear que:

$$\tan \angle JSO' = \frac{\overline{JO'}}{\overline{SO'}}; \quad \overline{JO'} = \overline{SO'} \bullet \tan \angle JSO'$$

$$\overline{JO'} = 4 \bullet \tan 36{,}9° \approx 4 \bullet 0{,}7508 \approx 3 cm.$$

Por tanto, el lado del cuadrado de la base EFGH mide 6,0 cm.

$$V_{SEFGH} = \frac{A_B \bullet h}{3} = \frac{6^2 \bullet 4}{3} = \frac{36 \bullet 4}{3} = 48 cm^3$$

b) (1) $A_{ABCDEFGH} = A_{ABCD} + A_{EFGH} + 4A_{ABEF}$. Para realizar este cálculo vemos que es necesario calcular el lado de cada cuadrado de lo cual tenemos según los datos que ofrece el ejercicio lo siguiente:

En el triángulo SOI rectángulo en O $\overline{OI} \,||\, \overline{O'J}$ aplicando el teorema de las transversales entonces se cumple que: $\frac{\overline{SI}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{JO'}}$

$\overline{IO} = \frac{\overline{SI} \bullet \overline{JO'}}{\overline{SJ}}$ Pero $\overline{SJ} = 5cm$ por formar un trío pitagórico con $\overline{SO'}$ y $\overline{JO'}$, luego sustituyendo los valores se obtiene:

$\overline{IO} = \frac{15 \bullet 3}{5} = 9{,}0cm$ de donde el lado del cuadrado de la base

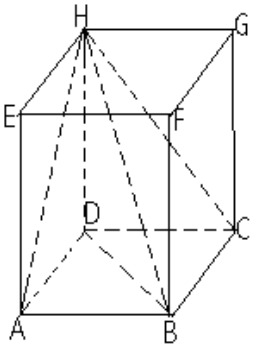
$\overline{AB} = 18cm$, por otro lado tenemos que: $A_{ABEF} = A_{ABS} - A_{EFS}$

$$A_{ABEF} = \frac{\overline{AB} \bullet \overline{SI}}{2} - \frac{\overline{EF} \bullet \overline{SJ}}{2} = \frac{18 \bullet 15}{2} - \frac{6 \bullet 5}{2} = 135 - 30 = 105cm^2$$

Sustituyendo en (1)

$$A_{ABCDEFGH} = \overline{AB}^2 + \overline{EF}^2 + 4A_{ABEF} = 18^2 + 6^2 + 4 \bullet 105$$

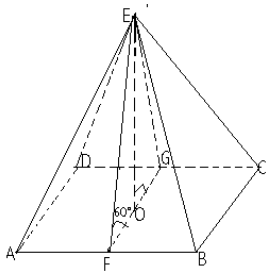
$$A_{ABCDEFGH} = 324 + 36 + 420 = 780cm^2 = 7{,}8dm^2$$



Ejercicios propuestos:

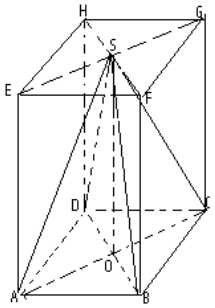
1. Un lado de la base rectangular del prisma ABCDEFGH, excede en dos centímetros al otro lado. Se rebaja el prisma hasta dejarlo en la pirámide ABCDH. ¿Qué cantidad de material se desperdicia si $\overline{HD}$ = 25,0 cm. Y el <HBD = 68,5°?

2. En la figura se tiene una pirámide regular de base cuadrada de 3,5 dm de altura. Si la altura de una de sus caras forma un ángulo de 60° con el plano de la base, Calcula el área total y el volumen del cuerpo.



3. Una pirámide regular de base cuadrada de 24 cm. de altura se corta por un plano paralelo a la base y distante 16 cm. del vértice. Si el ángulo que forma la altura con las caras es de 60°, halla el Volumen del cuerpo que resulta de eliminar la pirámide superior.

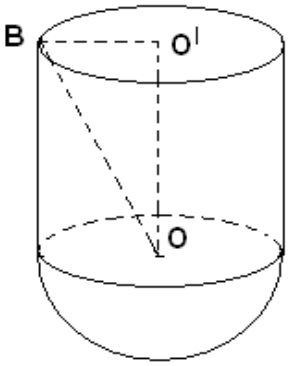
4. La generatriz de un cono mide 10 cm de longitud, el ángulo formado por la generatriz y el plano es de 60°. Calcular el área total y el volumen del cono.



5. En la figura ABCDEFGH es un prisma recto. ABCDS es una pirámide regular < SAO =30° y $\overline{SA}$ = 0,440 dm.

   Calcula el volumen del prisma ABDEFH.

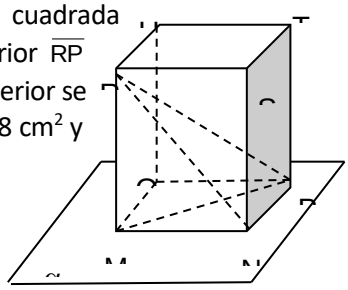
6. En la figura se observa una pieza formada por un cilindro circular recto con radio r, el cual se ha unido por su base inferior a una semiesfera de igual radio. O y O' son los centros de las bases inferior y superior del cilindro respectivamente. B es un punto de la circunferencia de centro O' y $\angle$ BOO'= $14{,}04^0$. La altura total de la pieza es 20 cm.



   a) Halla el área total de la superficie de la pieza.

   b) Halla el volumen de la pieza.

7. En la figura se ha representado el prisma recto MNPQRSTU de base cuadrada situada sobre el planoα, donde se han trazado tanto la diagonal interior $\overline{RP}$ como las diagonales $\overline{MP}$ y $\overline{RN}$ sobre dos de sus caras; además en su interior se observa la pirámide oblicua MNPR. Si el área Lateral del prisma es 62,28 cm^2 y $\angle$RNM = 60^0.



   a) Calcula el volumen de la pirámide MNPR.

   b) Clasifica el triángulo RNP atendiendo a las longitudes de sus lados. Justifica tu respuesta

8. Un rodillo para pintar paredes tiene 26,0 cm de largo y 5,0 cm de radio.

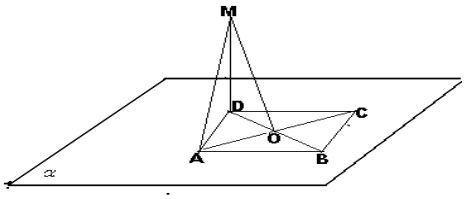
   a) Calcula su área lateral y su área total.

   b). Halla su volumen

9. En una fábrica se envasa fruta bomba en almíbar en potes cilíndricos de 5,0 cm de radio y 12 cm de altura, ¿qué superficie de latón se necesita para un pote? Si el metro cuadrado de latón cuesta $25,00, ¿cuánto costará la fabricación de 100 potes?

10. Sean ABCD un rombo contenido en un plano α, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ sus diagonales que se cortan en O, $\overline{MD} \perp \alpha$:

    a) Prueba que el triángulo AOM es rectángulo.



b) Calcula el área del triángulo AOM, si el área del rombo es de 12 cm². Si $\overline{BD} = 4{,}0cm$ y $\overline{OM} = 4{,}6cm$

Halla el volumen de la pirámide ABCDM.

11. De las proposiciones dadas a continuación, di cuál es verdadera (V) y cuál es falsa (F). Justifica las que consideres falsas.

a) Los vértices de un triángulo no determinan un plano.

b) El baricentro, el incentro y el ortocentro de un triángulo equilátero determinan un plano.

c) En el espacio, si dos rectas no tienen puntos comunes, entonces se cruzan.

d) Dos planos pueden tener solamente dos puntos comunes.

e) Sean *r, s* y *t* rectas del espacio que se cruzan, entonces las mismas determinan tres planos.

f) Si una recta *r* es perpendicular a otra recta *r´* contenida en un plano α, entonces *r* es perpendicular a todas las rectas del plano α que pasan por el pie de la recta *r*.

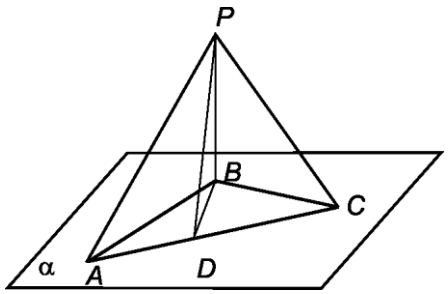
12. En la figura:

$\overline{AP} \perp \alpha$

$\overline{AD}$ Altura del $\triangle ABC$

$\overline{AC} = 30\,cm$

$\overline{PC} = 6{,}0\,dm$

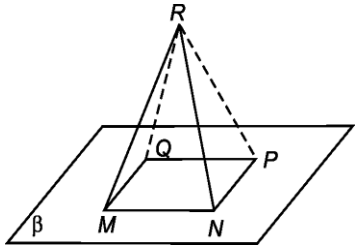


a) Calcular el ángulo formado por la oblicua $\overline{PC}$ y el plano α.

b) Prueba que $\triangle PDC$ es rectángulo.

13. En la figura: MNPQ: cuadrado contenido en el planoβ.$\overline{RQ} \perp \beta$

Si desde R se trazó $\overline{RN}$ oblicua al plano del cuadrado con una longitud de 16 cm de manera que $\overline{RN}$ forma un ángulo de 30º con el plano β y además se trazaron las oblicuas $\overline{RM}$ y $\overline{RP}$. Calcula el 60% del volumen del cuerpo MNPQR.



14. ¿Cómo trazaríamos por un punto P una recta paralela a dos planos α y β, que se corten? Fundamenta la respuesta.

15. Fundamenta las siguientes propiedades:

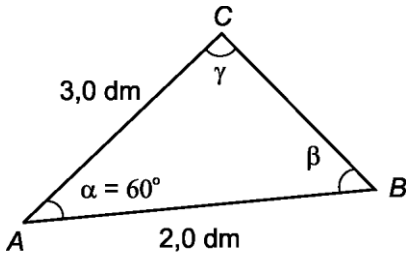
a) Cuando se dobla una hoja de papel se obtiene un borde recto.

b) Si una recta *r* es paralela a un plano α, toda recta *r'* paralela a *r* trazada por un punto del plano está contenida en el plano.

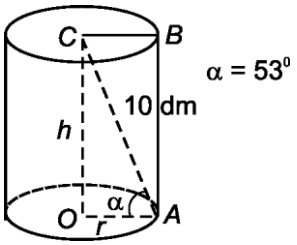
c) Si por el pie de una perpendicular a un plano se traza una perpendicular a cualquier recta *r* del plano, toda recta *r'* que pase por la intersección de *r* y *r'* y corte a la perpendicular al plano es perpendicular a la recta *r.*

d) Si se trazan a un plano tres oblicuas por un punto exterior, la perpendicular trazada del mismo punto al plano lo interseca en el centro de una circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son los pies de las oblicuas.

16. 16. La base de un prisma recto, cuya altura mide 10 dm, es el triángulo *ABC* representado. Calcula el 75 % de su volumen.



17. Calcula el volumen del cilindro circular recto representado de acuerdo con los datos de la figura:



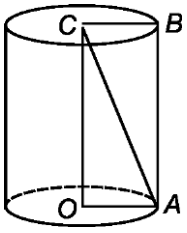
18. El rectángulo *OABC* gira en torno al lado $\overline{OC}$, generando el cilindro recto representado en la figura. La diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo dado forma con el plano de su base un ángulo α = 67,4º. Calcula el volumen del cilindro si su área total es 534 dm^2.

DATOS ÚTILES:

$\sqrt{2} = 1{,}41 \qquad \sqrt{3} = 1{,}73$

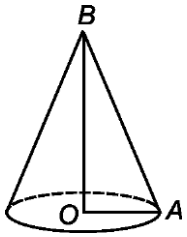
sen 67,4º = 0,923; cos 67,4º = 0,384

tan 67,4º = 2,4



19. En la figura se representa un cono circular recto, el cual se ha formado al girar el triángulo *AOB*, rectángulo en *O*, en torno al cateto $\overline{OB}$. La generatriz del cono forma un ángulo α = 53º con el plano de su base:

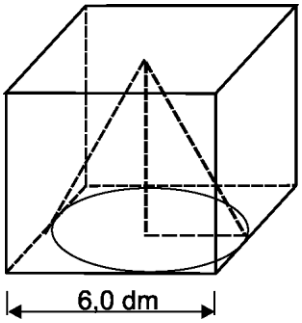
¿Cuál es el perímetro del triángulo *AOB* para que el área lateral del cono sea 189 dm^2?



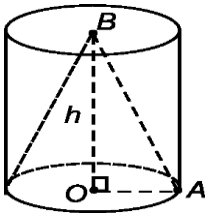
20. La figura muestra un cubo en el que se ha inscrito un cono circular recto.

a) Si cada arista del cubo mide 6,0 cm, calcula la longitud del radio de la base del cono y su volumen.

b) Calcula el volumen de la parte del cubo que queda al extraer el cono de su interior.



21. Con una pieza cilíndrica circular recta de madera, de 12 dm de altura, se quiere construir un cono circular recto de igual altura y base que el cilindro, como se muestra en la figura. Si el ángulo que forma la altura del cilindro y la generatriz del cono tiene una amplitud de 37º. Calcula la cantidad de madera que se desperdicia al construir el cono si se conoce que $\overline{OB}$ es perpendicular al radio $\overline{OA}$ de la base común de los cuerpos representados.



22. En la siguiente figura, aparece representado un prisma recto de base rectangular:

Si:

$\overline{AB}$ = 4,0cm

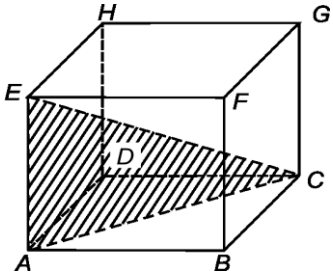
$\overline{BC}$ = 3,0 cm

$\overline{AB}$ = 6,0 cm

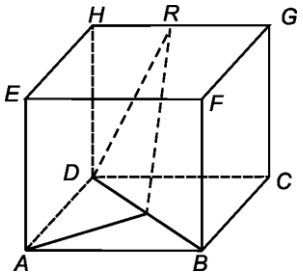
a) Calcula el volumen del prisma.

b) Calcula la longitud del segmento *AC*.

c) Calcula el área del triángulo *ACE*.



23. Sea un cubo de arista *a.* si R es punto medio de *HG* y $\overline{AM}$ es la mediana relativa al lado $\overline{BD}$ en el triángulo *ABD*.



a) Clasifica el ΔAMR según la amplitud de sus ángulos interiores.

b) Demuestra que: $\overline{AR}^2 \rangle \overline{AM}^2 + \overline{MR}^2$

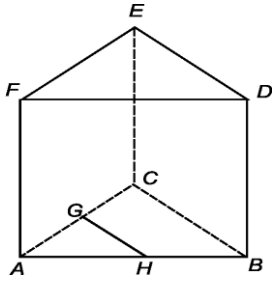
24. 24. Los puntos C, H y D pertenecen a la circunferencia de centro O y radio OH contenida en el plano α. B es punto medio de la cuerda $\overline{CD}$, $\overline{OA}$ = 3, 0 dm y $\overline{OB} = \sqrt{3}\,\text{dm}$

$\overline{OA}$: Distancia de A al plano α.

a) Calcula el ángulo de inclinación de la oblicua AB con el plano α.

b) Si $\overline{AB} \parallel \overline{QD}$ y A y B equidistan del plano α. Clasifica el cuadrilátero ABDQ.

25. En la figura: *ABCDEF*: prisma recto cuya base es el triángulo *ABC*, rectángulo en *C*.



$\overline{GH} \perp \overline{AC}$.

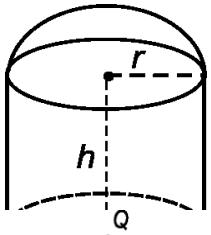
$\overline{AH} = 4{,}0\,\text{dm}$

$\overline{AC} = 6{,}0\,\text{dm}$

$\overline{AG} = 24\,\text{cm}$

$\overline{AF} = 12\,\text{dm}$ Calcula el área total y el volumen del prisma dado.

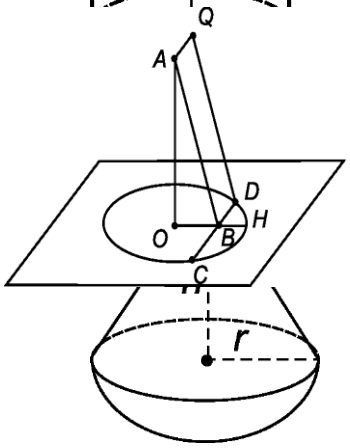
26. En la figura se representa un cuerpo compuesto por una semiesfera da radio *r* y un cilindro de igual radio y altura *h.*



a) Si *h* = 3,0 cm. Calcula *r* para que el volumen del cuerpo sea numéricamente igual a 6π veces el radio.

b) Si *h* = 2,5 dm, calcula *r* si se conoce que el área total del cuerpo es $20\pi\ \text{cm}^2$.

27. En la figura se ha representado un cuerpo compuesto por un cono circular recto de radio *r,* altura *h* y generatriz *g,* y una semiesfera de radio igual al del cono. Se conoce que el volumen total del cuerpo es $243\pi\left(2+\sqrt{3}\right)\ \text{dm}^3$ y que la generatriz del cono forma un ángulo α = 30º con su altura. Calcula:

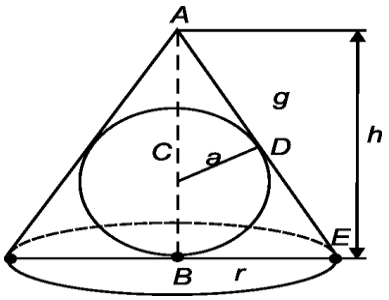


a) El volumen del cono circular recto.

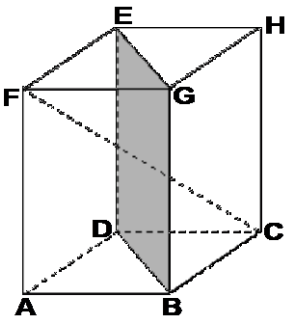
b) El área lateral del cuerpo.

28. En la figura se representa un cono circular recto de radio *r,* altura *h* y generatriz *g,* en el cual está inscrito una esfera de centro *C* y radio *r.*

$\overline{CD} \parallel \overline{DE}$. Demuestra que el volumen del cono viene dado por la expresión $V = \dfrac{a^2 h^2 \pi}{3(h-a)^2}$



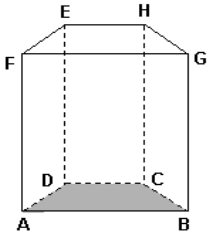
29. ABCDEFGH es un prisma recto, ABCD es un rombo y DBGE un cuadrado. La diagonal interior $\overline{FC} = 50$ cm forma un ángulo de 36,9º con el rombo base.



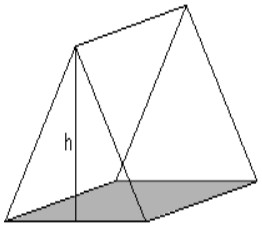
a) Calcula el volumen del prisma.

b) Conociendo que $\overline{AC} = 40$ cm, $\overline{DB} = 30$ cm, $\overline{AF} = 30$ cm; Comprueba que su área total es de 42 dm^2.

30. La figura muestra un prisma recto de altura h_p = 46 cm. La base ABCD es un trapecio. Las diagonales $\overline{AE}$, $\overline{DH}$ y $\overline{CG}$, de las caras, forman con el plano base ángulos de 66,5º. Si $\overline{AB} = 44$ cm, calcula el volumen del prisma.



31. La figura nos muestra la armazón de una casa de campaña donde todas sus aristas laterales miden 5,0 m.

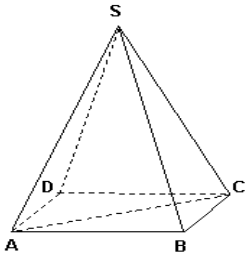


a) Calcula su altura h.

b) ¿Qué cantidad de lona se necesita para forrarla?

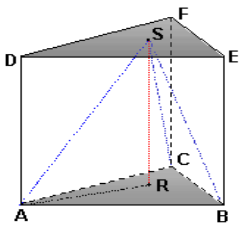
c) Calcula su volumen

32. En la figura, ABCDS es una pirámide recta de base cuadrada. El ΔACS tiene un área de 48 cm^2 y $\tan\angle SAC = \dfrac{4}{3}$. Calcula el volumen y el área lateral de esta pirámide.



33. La altura de un cono circular recto es $h = 4\sqrt{3}$ dm y cada generatriz forma un ángulo de 60º con el plano de la base. Comprueba que el cono tiene un volumen V≈ 115 dm^3 y un área lateral AL ≈ 100 dm^2.

34. En la figura, ABCDEF es un prisma regular de base triangular. $\overline{SR} = 9{,}0\,cm$ es la altura de la pirámide recta ABCS, inscrita en el prisma y ∠SAR = 60º.

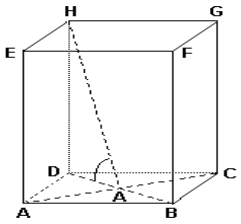


Calcula:

a) El volumen de la pirámide y el área total del prisma.

b) El volumen del prisma y el área total de la pirámide.

35. El prisma recto ABCDEFGH tiene como bases los rombos ABCD y EFGH. Si el perímetro del rombo es de 52 cm, ∠DOH = 60^0 y $\overline{AC} = 2\overline{BD} + 4\,cm$. Calcula el volumen del prisma y el área del triángulo HOC.



36. Una esfera de centro O y radio re tiene inscrito un cono circular recto de altura h_c tal que $2h_c = 3r_e$. Demuestra que: $\frac{V_{cono}}{V_{esfera}} = \frac{9}{32}$.

5.4 Geometría analítica de la recta

5.4.1 Base teórica fundamental de la geometría analítica

Fórmulas básicas:

- Distancia entre dos puntos:

Dados dos puntos del plano $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ la distancia entre ellos está dada por:

$$d(P;Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

- Pendiente de una recta:

Sean $P(x_1; y_1)$ y $Q(x_2; y_2)$ dos puntos de una recta no paralela al eje "y"; la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Es la tangente del ángulo que forma la recta con el semieje "x" positivo ($m = tan\alpha$).

- Condiciones de paralelismo y perpendicularidad:

Sean las rectas r_1 y r_2 de pendiente m_1 y m_2 respectivamente, se cumple que:

a) $r_1 \,||\, r_2$ si y solo si $m_1 = m_2$.

b) $r_1 \perp r_2$ si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- Coordenadas del punto medio de un segmento:

Sea $\overline{AB}$ un segmento cuyos extremos tienen coordenadas $A(x_a; y_a)$ y $B(x_b; y_b)$ entonces las coordenadas del punto medio M de $\overline{AB}$ son:

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}; \frac{y_a + y_b}{2}\right)$$

Ecuación cartesiana de la recta:

Para obtener la ecuación cartesiana de la recta seguimos el algoritmo:

1. Si conocemos un punto y la pendiente:
   a) consideramos un punto $P(x; y)$ cualquiera de la recta;
   b) sustituimos las coordenadas de P y de un punto conocido, al igual que el valor de la pendiente en la fórmula de la misma.
   c) efectuamos y expresamos en la forma $Ax + By + C = 0$.
2. Si conocemos dos puntos:

Hallamos el valor de la pendiente y seguimos el procedimiento anterior utilizando uno de los puntos dados.

- Distancia de un punto a una recta:

La distancia de un punto $P(x_0; y_0)$ a la recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$, se denota d(P;r) y es:

$$d(P; r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Intersección entre rectas y curvas:

Para determinar la posición relativa de una recta y una curva de segundo grado (circunferencia, parábola, elipse o hipérbola), se despeja una variable en la ecuación lineal y se sustituye en la cuadrática, obteniéndose una ecuación de segundo grado de una variable.

- Si el discriminante D de esta ecuación cumple que:
  - **D > 0**: la recta es secante.
  - **D = 0**: la recta es tangente.
  - **D < 0**: la recta es exterior.
- Para determinar los puntos de intersección, si existen, se resuelve completamente el sistema de ecuaciones formado.

Ejercicios resueltos:

1. Sean M (–1; –2) y N (7; 2) los vértices de un triángulo isósceles MNP de base $\overline{MN}$.

   a) Indique cuál de los siguientes pares ordenados pueden ser las coordenadas punto P: (7; 9), (3; –2) y (–1; 8).

   b) Calcula el área del Δ MNP.

2. Sean A (0; –4), B (5; –5), C (6; 0) y D (1; 1) los vértices de un cuadrilátero. Demuestra que es un cuadrado y calcula su área.

Solución:

1. Como el triángulo es isósceles de base $\overline{MN}$, entonces debemos probar que los lados $\overline{MP} = \overline{NP}$.

Por lo tanto se tiene que calcular la distancia de los puntos dados hasta los indicados, con el punto (7; 9) se tiene:

$$d(M;P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-7)^2 + (-2-9)^2} = \sqrt{64+121} = \sqrt{185}$$
$$d(N;P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-7)^2 + (2-9)^2} = \sqrt{0+49} = \sqrt{49} = 7u$$

Esto quiere decir que no corresponde al primer punto, probemos ahora con el segundo punto (3; -2)

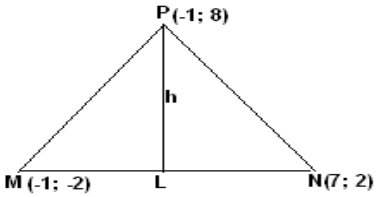
$$d(M;P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{16+0} = \sqrt{16} = 4u$$
$$d(N;P) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}u$$

Como los valores encontrados no son iguales entonces, este no corresponde al punto P, solo nos queda probar con el punto (-1; 8).

$$d(M;P)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1+1)^2+(-2-8)^2}=\sqrt{0+100}=\sqrt{100}=10u$$
$$d(N;P)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7+1)^2+(2-8)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10u$$

Y como ambas distancias son iguales entonces el punto es P (-1; 8)

b) Consideremos la siguiente figura de análisis



$$A_{MNP}=\frac{\overline{MN}\bullet h}{2}$$

Pero: $\overline{MN}=\sqrt{(7+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}u$.

L (3; 0) por ser punto medio de $\overline{MN}$

$$h=d(P;L)=\sqrt{-1-3)^2+(8-0)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}u$$

Sustituyendo en el área obtenemos:

$$A_{MNP}=\frac{\overline{MN}\bullet h}{2}=\frac{4\sqrt{5}\bullet 4\sqrt{5}}{2}=\frac{80}{2}=40u^2$$

2. Basta probar que las diagonales son iguales y perpendiculares.

Efectivamente: A (0; –4), B (5; –5), C (6; 0) y D (1; 1)

$$d(A;C)=\sqrt{(0-6)^2+(-4-0)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=4\sqrt{13}u$$
$$d(B;D)=\sqrt{(5-1)^2+(-5-1)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=4\sqrt{13}u$$

Con esto se prueba que las diagonales son iguales, ahora se debe probar que son perpendiculares:

$$m_{AC}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0+4}{6-0}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$ y

$$m_{BD}=\frac{1+5}{1-5}=\frac{6}{-4}=-\frac{3}{2}$$

Al multiplicar estas pendientes se obtiene (-1) por lo que se concluye que las diagonales son perpendiculares

Por tanto el cuadrilátero es un cuadrado por tener sus diagonales iguales y perpendiculares.

Ejercicios propuestos:

1. Dados los puntos A (2,2); B (5,6); C (13,0) y D(x, y) vértices de un cuadrilátero.
   a) Pruebe que el triángulo ABC es rectángulo en B.
   b) Escriba una ecuación de la recta paralela a AB que pasa por el punto C.
   c) Determine las coordenadas del punto D para que el cuadrilátero ABCD (en ese orden) sea un paralelogramo.

2. Sean M (2,0); N (6,3) y P (3,7) vértices de un triángulo.
   a) Pruebe que el Δ MNP es rectángulo.
   b) Escriba una ecuación de la mediana relativa al lado $\overline{NP}$
   c) Determine el área y el perímetro del triángulo.

3. Sea EFGH un trapecio de bases $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ del cual se conocen las coordenadas de los vértices.

   E (-1,3); F (1,-1) y G (7,1). Determine las coordenadas del vértice H si las diagonales se cortan perpendicularmente.

4. Sean A (-2,-1); B (1,3) y C (5,0) los vértices de un triángulo.
   a) Escribe una ecuación de la mediatriz relativa al lado $\overline{AB}$.
   b) Clasifica el triángulo atendiendo a la amplitud de sus ángulos.
   c) Determine su área.

5. Los puntos P (-2,0); Q (0,-4); R (8,0) y T (6,4) son vértices de un cuadrilátero.
   a) Determina la ecuación de la diagonal $\overline{QT}$.
   b) Prueba que el cuadrilátero es un rectángulo.
   c) Calcula el área del cuadrilátero.
   d) ¿Cuál es la menor distancia de P a la recta que contiene los puntos Q y T?

6. En una circunferencia los extremos de un diámetro son A (-3,0) y B (4,0). Calcula el área del triángulo ABC, conociendo que C(x, 7/2) pertenece a la circunferencia.

7. Una recta r contiene los puntos A (-3,0) y D(x, y) formando un ángulo de 45° con el positivo del eje "x", otra recta s perpendicular a r contiene los puntos D y C(4,0). Un punto B (x,-4) pertenece al eje

"y" y es vértice del cuadrilátero ABCD. Calcula el área del cuadrilátero ABCD conociendo que $\overline{AD} \,||\, \overline{BC}$.

8. Los vértices del triángulo LMN son L (-1,-2); M (3,1) y N (1,2).
   a) Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto medio de $\overline{LM}$ y es paralela al lado $\overline{LN}$.
   b) Prueba que el triángulo LMN es rectángulo en N.
   c) Calcula el área del triángulo LMN.
   d) ¿Cuál es la distancia del punto $T(5/4;2\sqrt{5})$ a la recta obtenida en el inciso a)?

9. Los puntos A (0,-1); B (-2,3); C (2,1) y D (4,-3) (en ese orden) son los vértices de un cuadrilátero.
   a) Demuestre que ABCD es un rombo.
   b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto medio del lado AB y no intercepta a la diagonal AC.
   c) Calcule su perímetro y su área.

10. Del paralelogramo ABCD se conocen dos de sus vértices: B (6,1); C (5,4) y las ecuaciones del lado $\overline{AD}$: 3x + y – 7 = = y una de sus diagonales:

    3x – y – 11= 0

    a) Escribe una ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{AB}$.
    b) Calcule el perímetro del paralelogramo.

11. Los puntos P (-1,2); Q (-2,1); R y S en ese orden son los vértices de un cuadrado.
    a) Escribe la ecuación de la circunferencia de centro A y radio AB.
    b) Determine las coordenadas de los vértices C y D sabiendo que el punto D está situado sobre uno de los ejes de coordenadas.

12. Sean A (2,1) y B (6,3) vértices de un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$, la recta 8x – y = 15, contiene a uno de sus lados iguales. Determine:
    a) Ecuación de la mediatriz relativa al lado $\overline{AB}$.
    b) Coordenadas del vértice C.
    c) Área y perímetro del triángulo.

13. Sea EFGH un paralelogramo de vértices E (2,1); F (5,4); G (4,7) y H (x, y).

    a) Determine las coordenadas del vértice H.

    b) Escriba una ecuación de la recta paralela a la diagonal $\overline{EG}$, que pase por el punto F.

    c) Calcular el perímetro del paralelogramo.

14. Sea ABC un triángulo isósceles cuya base $\overline{AB}$ tiene por ecuación

    x – y + 5 = 0 y uno de sus lados x + 3y – 19 = 0, siendo el vértice B (1,2).

    a) Escribe una ecuación de la mediana relativa a la base.

    b) Determine el área y el perímetro del triángulo.

15. Calcule el área del cuadrilátero convexo ABCD si A (5,3), B (3,4), C (1,0) son vértices del cuadrilátero, el diagonal BD es paralela al eje "y" y la suma de las longitudes de las diagonales es 9 u.

16. Sea un triángulo DEF; D (5,1); E (1,4) y F pertenece a la recta: y = -2x + 3.

    Halla las coordenadas de F Si el triángulo es rectángulo en F y además las coordenadas de F son números enteros.

17. Sea M (1,3) un vértice de un rombo MNPQ, x + y – 6 = 0 y x – y – 4 = 0 ecuaciones de dos lados consecutivos.

    a) Escriba una ecuación de la diagonal $\overline{NQ}$.

    b) Hallar el área y perímetro del rombo.

18. Sean A (-3,5) y B (1,7) los vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD y el punto de intersección de sus diagonales es M (1,1).

    a) Escribe una ecuación de la recta que contiene a la altura del paralelogramo trazada desde el vértice B.

    b) Halla el área del paralelogramo.

19. Los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC son:

    M (2,-1) y N (-1,4) respectivamente y las del vértice C (4,6).

    a) Escribe la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado $\overline{AB}$.

    b) Calcula el área del triángulo ABC.

20. De un rombo LMNP se conocen las coordenadas de los vértices: L (-1,2);

    M (3,0) y N (5,4).

    a) Escribe la ecuación de la diagonal LN.

    b) Determine las coordenadas de P.

    c) Calcule el área del rombo.

21. Los puntos A (2,3); B (5,0) y C (6,1) son los vértices de un triángulo.

    a) Escriba la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la mediana relativa al lado $\overline{AC}$.

    b) Pruebe que el triángulo es rectángulo.

    c) Calcule el área del triángulo ABC.

22. Sea ABCD un trapecio de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ rectángulo en D, del cual se conocen las coordenadas: A (-1,3); B (0,1) y C (6,-1). Determine las coordenadas del vértice D y el área del trapecio.

23. Dadas las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero IJKL: I (0,3); J (2,-1); K (4,3) y L (2,7).

    a) Prueba que IJKL es un rombo.

    b) Escribe una ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es perpendicular a $\overline{JL}$.

    c) Determine el área del rombo.

24. De un rombo ABCD se conocen las coordenadas: A (-3,1) y B (2,2). Si x + y +2 = 0 es la ecuación de una de sus diagonales. Determine las coordenadas de los otros dos vértices.

25. Dadas las coordenadas de los puntos: R (-4,-1); O (1,4); S (6,-1) y A (1,-6) vértices de un cuadrilátero ROSA.

    a) Pruebe que ROSA es un cuadrado.

    b) Escribe una ecuación de la recta, que pasa por el punto de intersección de las diagonales y es paralela a $\overline{RO}$.

26. Sea C (x, 4) un vértice del triángulo ABC; x + 2y – 7 = 0 ecuación de la altura correspondiente al lado $\overline{AC}$ y x – 2y + 1 = 0 ecuación que contiene al lado $\overline{BC}$.

    a) Halle las coordenadas del vértice B.

    b) Escribe una ecuación de la recta perpendicular a la altura dada y que pasa por el punto medio de $\overline{BC}$.

27. Del cuadrilátero ABCD se conocen sus vértices A (2,0); B (6,3); C (3,7) y D (-1,4).
    a) Demuestre que ABCD es un cuadrado.
    b) Halle las coordenadas del Baricentro del triángulo ABC si la recta r: x + 7y = 27 es la ecuación de la mediana relativa al lado $\overline{AC}$.

28. De un triángulo ABC isósceles de base $\overline{AC}$ se tienen las coordenadas de los vértices A (-2,4); B (4,1) y la ecuación que contiene al lado $\overline{AC}$: 3x + y = -2.
    a) Determine las coordenadas del vértice C.
    b) Calcule el área del triángulo ABC.

29. Del rombo EFGH se conoce E (2,-1); H (1,2); x + 2y – 5 = 0 ecuación de una de las diagonales. Escribe una ecuación de la recta que contiene al lado $\overline{FG}$.

30. Sean los puntos O (1,-1); P (4,2) y Q (3,3).
    a) Pruebe que OPQ es un triángulo es un triángulo rectángulo.
    b) Halle la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{OP}$.
    c) Determine la abscisa del punto R (x, -2) para que $\overline{AP} \,//\, \overline{AC}$ sabiendo que la pendiente de la recta que pasa por A y R es m = 1.

31. Los puntos A(-1;-2); B; C(5;2) y D en ese orden son los vértices de un rombo y 5x- y +3 = 0 es una ecuación del lado $\overline{AD}$
    a) Escribe una ecuación de la diagonal BD.
    b) Determina las coordenadas del vértice D.
    c) Hallar el área del rombo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDREIV, P.P. (1969). Geometría: Estereometría. Editorial Pueblo y Educación.

ALIAGA, S. (1997). Material de Estudio para el entrenamiento de los Concursos Matemáticos en el nivel medio. Ponencia presentada en el Congreso Internacional PEDAGOGÍA 97.

ALIAGA, S. (1999). ¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento lógico matemático? Ponencia presentada en el Congreso Internacional PEDAGOGÍA 99.

ALIAGA, S. (2008). Folleto de ejercicios para los entrenamientos de los estudiantes participantes en los Concursos de Matemática del IPVCE "Silberto Álvarez Aroche". Tesis en opción al título de Máster en ciencias de la Educación. Granma.

ALIAGA, S. (2015). Procedimiento Didáctico para la preparación de los estudiantes que aspiran ingresar a la Educación Superior. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias.

BALDOR, A. (1954). Aritmética. Imprenta Nacional de Cuba. La Habana.

BALDOR, A. (1954). Álgebra. Imprenta Nacional de Cuba. La Habana.

BALLESTER, S. (1995). ¿Cómo sistematizar los conocimientos matemáticos? / Sergio Ballester. Ciudad de la Habana: Editorial Academia.

BALLESTER, S. (1995). ¿Cómo consolidar conocimientos matemáticos? /Sergio Ballester, C. Arango. Ciudad de la Habana: Editorial Academia.

BALLESTER, S. (1992). Metodología de la enseñanza de la Matemática. / Sergio Ballester… [et, al]. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación. Tomo 1.

CAMPISTROUS, L. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos/ Luis Campistrous Pérez, Celia Rizo Cabrera. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

CAMPISTROUS, L. (1989). Matemática Décimo. Libro de Texto/ Luis Campistrous Pérez… [et, al]. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

CAMPISTROUS, L. (1989). Matemática Onceno. Libro de Texto/ Luis Campistrous Pérez… [et, al]. La Habana. Editorial Pueblo y Educación.

DÍAZ, M. (2006). Conjunto. CD de Ciencias Exactas.

FULLER, G. (1963). Álgebra elemental, Compañía Editorial Continental SA, México.

GONZÁLEZ., & M., M. (1976). Álgebra Elemental Moderna. (Volúmenes 1 y 2). Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de La Habana.

GONZÁLEZ, M. (1958). Quinto Curso. Complemento de Aritmética y Algebra/ Mario González. La Habana: Editorial "Selecta".

GUSIEV, V. (1989). Práctica para resolver problemas matemáticos. Geometría/ V. Gusiev, V. Litvinenko, A. Mordkovich. Moscú: Editorial Mir.

HERNÁNDEZ, J. (1998). ¿Cómo estás en Matemática? Editorial Científico Técnica. Ciudad de La Habana.

JIMÉNEZ, M., &, H., & R., &, B., J. (2006). Funciones. Ejercicios sobre funciones. MINED. CD de la Carrera de Ciencias Exactas.

KALNIN R.A. Algebra y Funciones Elementales/ R.A. Kalnin. (1973). Moscú: Editorial Mir.468 pp.

LITVINENKO V. (1989). Prácticas para resolver problemas matemáticos. Algebra/ V. Litvinenko,… [et, at]. Moscú: Editorial MIR.

MINED, (1992). Matemática 6, 7, 8, 9 y 10. Colectivo de Autores.

MINED, (2005). Nuevos cuadernos de Matemática 7,8 y 9. Colectivo de Autores.

MINED, (2006). Orientaciones Metodológicas Facultad Obrera Campesina Matemática. Soporte digital.

MINED, (2008). Programas de Matemática de la Facultad Obrera Campesina. Soporte digital.

MUÑOZ, F. (1987) Problemas de Matemática elemental 10 y 11 grado/Félix Muñoz Baños, Luis Campistrous Pérez. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

PAZ, S, A. (1963). Geometría. Cuarto Curso/ Antonio Paz Sordía. La Habana: Editorial Nacional de Cuba.

RODRÍGUEZ, A. (2008). Alternativa para la dirección del aprendizaje de la Matemática. Tesis en opción al título de Máster en ciencias de la Educación. Granma.

RODRÍGUEZ, A. (2015). Modelo del proceso enseñanza-aprendizaje contextualizado de la asignatura Matemática. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias.

ROSELL SÓCRATES. Matemática 1er Curso y 2do Curso.

SANDOVAL, A. (2002). Actividades de Matemática para el Ingreso a la Educación Superior.

SANDOVAL, A. (2005). Ejercicios y problemas de Matemática para los CSIJ.

SANDOVAL, A. (2008). Matemática IV Semestre. Armando Sandoval Torres,... [et, at]. Editorial Pueblo y Educación.

SANDOVAL, A. (2008). Matemática V Semestre. Armando Sandoval Torres, [et, at]. Editorial Pueblo y Educación.

SHARIGUIN I. (1986). Problemas de Geometría. Planimetría. / I. Shariguin. Moscú: Editorial Mir.

SHARP, H. JR. (1975). Elementos de Trigonometría Plana. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

SPITZBART, A. Y ROSS, B. (1970). Álgebra y trigonometría plana, CECSA.

Ciencias y Letras

3ciencias