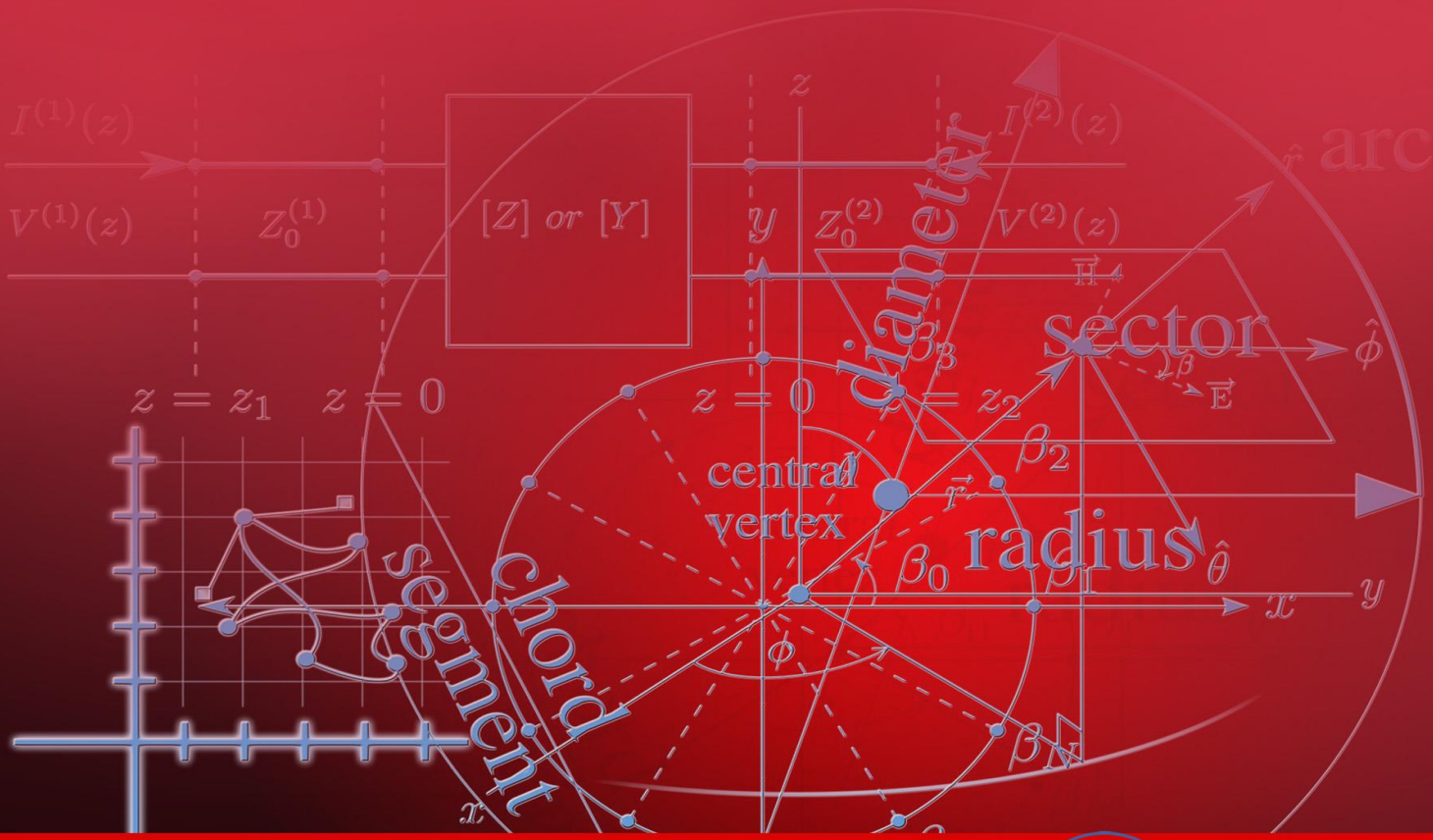
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CONTEXTUALIZADO A PROCESOS VIVENCIALES

Alberto Rodríguez Rodríguez



Ciencias y Letras

3ciencias

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL CONTEXTUALIZADO A PROCESOS VIVENCIALES

Dr. C. ALBERTO RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ. PhD.

Alberto Rodríguez Rodríguez. Licenciado en Matemática, Universidad de Granma, Máster en Ciencias de la Educación y Doctor en Ciencias por la Universidad de Granma. Investiga en temas relacionados con modelos pedagógicos-didácticos matemáticos, dogmas restrictivos en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática y estrategias de contextualización e interdisciplinariedad. Ha publicado diferentes libros relacionados con las matemáticas, entre ellos se destacan los dos tomos de Elementos de Matemática Básica para carreras universitarias; Otra mirada a las probabilidades, sus procesos y aplicaciones; La Estadística: Gnosis del ser humano; Modelo del proceso enseñanza-aprendizaje contextualizado de Matemática; Una aproximación al comportamiento de costos y tomas de decisiones; Procedimiento didáctico-matemático para ingresar a la universidad y La Metodología para la evaluación de cosechadoras cañeras. Actualmente se desempeña como profesor de matemáticas y Editor de la Revista UNESUM-Ciencias en la Universidad Estatal del Sur de Manabí, Ecuador.

Editorial Área de Innovación y Desarrollo, S.L.

Quedan todos los derechos reservados. Esta publicación no puede ser reproducida, distribuida, comunicada públicamente o utilizada, total o parcialmente, sin previa autorización.

© del texto: **el autor**

ÁREA DE INNOVACIÓN Y DESARROLLO, S.L.
C/ Els Alzamora, 17 - 03802 - ALCOY (ALICANTE) info@3ciencias.com

Primera edición: **marzo 2018**

ISBN: **978-84-948257-4-3**

DOI: **http://dx.doi.org/10.17993/CcyLl.2018.17**

ÍNDICE

PRÓLOGO 9
CAPÍTULO 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE 11
Introducción 11
1.1.-Definición de función 12
1.2.-Funciones reales de una variable real 13
1.3.-Propiedades generales de las funciones reales 13
1.3.1.-Simetría con respecto a una recta 14
1.3.2.-Paridad 14
1.3.3.-Monotonía 15
1.3.4.-Existencia de extremos 15
1.3.5.-Concavidad y punto de inflexión 16
1.4.-Funciones elementales básicas 16
1.4.1.-Función constante 16
1.4.2.-Función idéntica 17
1.4.3.-Función potencial 17
1.4.4.-Función exponencial 18
1.4.5.-Función logarítmica 18
1.5.-Función inversa 19
1.6.-Operaciones aritméticas con funciones 20
1.7.-Función compuesta 20
1.8.-Funciones que se obtienen mediante operaciones aritméticas 21
1.8.1.-Función proporcionalidad directa 21
1.8.2.-Función proporcionalidad inversa 22
1.8.3.-Función lineal 23
1.8.4.-Función cuadrática 24
1.8.5.-Función racional entera 25
1.8.6.-Función racional fraccionaria 25
1.9.-Funciones más utilizadas en la Economía 25
1.9.1.-Función de demanda 25
1.9.2.-Función de oferta 26
1.9.3.-Función de precio 27
1.9.4.-Función de costo 28
1.9.5.-Función de ingreso 29
1.9.7.-Función de ganancia (o pérdida) 30
1.9.8.-Funciones de consumo y ahorro 31
1.9.9.-Equilibrio de mercado 32
Ejercicios 34
CAPÍTULO 2. LÍMITE Y CONTINUIDAD 39
2.1.-Límite ordinario 40
2.2.-Límite de las funciones básicas en los puntos de su dominio 41
2.3.-Límite de las operaciones con funciones 42
2.4.-Regla de cancelación 42
2.5.-Límites laterales 44
2.6.-Límite real en el infinito 45
2.7.-Límite infinito en un número real 46
2.8.-Límite infinito en el infinito 47
2.9.-Reglas de cálculo con infinitos y números reales 48
2.10.-Indeterminaciones 48
2.11.-Regla de Leibniz 50
2.12.-Límite fundamental algebraico 51
2.13.-Continuidad en un punto 52
2.14.-Continuidad de una función en un conjunto 55

CAPÍTULO 3. DERIVACIÓN 61
3.1.-Derivada de una función en un punto 62
3.2.-Condiciones para la existencia de la derivada en un punto 63
3.3.-Derivada de las funciones elementales básicas 65
3.4.-Reglas aritméticas de derivación 67
3.5.-Derivada de la función inversa 69
3.6.-Derivadas de funciones compuestas 69
3.7.-Derivadas de orden superior 71
3.8.-Ecuación de la tangente y la normal 71
3.9.-Interpretación económica de la derivada 73
3.10.-Elasticidad de una función 76
3.11.-Diferencial de una función y sus aplicaciones 79
4.1.-Regla de L´Hospital 87
4.2.-Monotonía y Extremos locales 88
4.3.-Concavidad y Puntos de Inflexión 91
4.4.-Trazado de curvas 92
4.5.-Problemas de optimización 95
CAPÍTULO 5. INTEGRAL INDEFINIDA 101
5.1.-Integral Indefinida 102
5.2.-Propiedades de la Integral Indefinida 104
5.4.-Integración por sustitución 106
5.5.-Integración por partes 109
5.6.-Integración por descomposición en fracciones simples 110
5.7.-Aplicaciones económicas de la integral indefinida 113
BIBLIOGRAFÍA 121

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Simetría con respecto a una recta. 14
Figura 2. Monotonía. 15
Figura 3. Existencia de extremos. 15
Figura 4. Concavidad y punto de inflexión. 16
Figura 5. Función constante. 16
Figura 6. Función idéntica. 17
Figura 7.Función potencial. 17
Figura 8. Función logarítmica. 18
Figura 9. Función inversa. 20
Figura 10. Función proporcionalidad directa. 21
Figura 11. Función proporcionalidad inversa. 22
Figura 12. Función lineal. 23
Figura 13. Función cuadrática. 24
Figura 14. Límite ordinario. 41
Figura 15. Límites laterales. 45
Figura 16. Límite infinito en un número real. 47
Figura 17. Límite infinito en el infinito. 48
Figura 18. Continuidad en un punto. 55
Figura 19. Derivada de una función en un punto. 62
Figura 20. Ecuación de la tangente y la normal. 72
Figura 21. Diferencial de una función y sus aplicaciones. 80
Figura 22. Monotonía y Extremos locales. 89
Figura 23. Concavidad y Puntos de inflexión. 91
Figura 24. Integral Indefinida. 103

PRÓLOGO

Estudios recientes sobre el aprendizaje matemático de los alumnos y la forma en que operan y enfrentan los problemas cotidianos, arriban a la conclusión común de que los estudiantes universitarios emprenden con mayor o menor eficacia los problemas matemáticos que la vida les plantea y lo hacen con una lógica coherente y peculiar. En efecto, esos aprendizajes matemáticos no deben ser obviados u olvidados; por el contrario, constituyen un punto de partida para la enseñanza de la Matemática en esta etapa de la vida.

Por otra parte, en cuanto al despliegue del proceso de enseñanza-aprendizaje en la Educación Superior, las afirmaciones derivadas de los distintos estudios ilustran que la Matemática que se enseña es menos significativa y flexible que la que se ha construido en la vida, y es que a la educación matemática de adultos se han trasladado los modelos y los sustentos de otras educaciones, a pesar de que los conocimientos, la experiencia y las expectativas de unos y otros son diferentes. Se hace necesario conocer al adulto como persona que busca vincularse con el aprendizaje matemático formal porque siente la necesidad de aplicar los conocimientos de forma inmediata una vez adquiridos.

La Matemática ayuda a despertar la imaginación, el poder de análisis y la creatividad, constituyéndose en una base sólida para la mayoría de las ciencias y en una herramienta fundamental de cálculo. Su estudio es de gran importancia, para lograr la formación de profesionales capaces de insertarse en el cambiante mundo de la ciencia y la tecnología.

El profesional ingeniero, debe trabajar con modelos matemáticos para la solución de los problemas que debe enfrentar, tales como: diseño y construcción de estructura metálicas, diseño y construcción de elementos de máquinas o máquinas, uso óptimo de energías alternativas, entre otros, por lo tanto, las matemáticas son herramientas de suma importancia en su proceso de formación y en el campo laboral.

En este libro, se analizan los aspectos fundamentales de las funciones reales, del cálculo de límite, continuidad, derivadas, determinación de máximos, mínimos y todo lo relacionado con las integrales indefinidas; contenidos enfocados desde la contextualización a procesos vivenciales que marcan la diferencia con textos anteriores relacionados con temáticas afines desplegadas en esta obra, motivado porque una de las problemáticas actuales consiste en cómo llevar a vías de hecho las relaciones interdisciplinarias desde el contenido matemático, de la selección de los métodos y formas organizativas, para plantear actividades que en el proceso de enseñanza-aprendizaje resulten motivantes y permitan conectar conocimientos y habilidades de dominios diversos en la búsqueda de soluciones prácticas, para contribuir a la formación de valores y actitudes positivas en los estudiantes.

HACER PROPUESTAS DE CÓMO PROCEDER, LLEVA IMPLÍCITO EL RIESGO DE LA ACEPTACIÓN O LA INCONFORMIDAD, QUE EN OCASIONES SE CRITICAN Y SE REALIZAN NUEVOS PLANTEAMIENTOS. SI ESTA PRESENTACIÓN ORIGINA ESAS REFLEXIONES, PUEDE SER CONSIDERADA CON ACIERTOS...

“MUCHAS GRACIAS”

EL AUTOR

CAPÍTULO 1. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

Introducción

La Matemática Superior, está conformada por los aspectos básicos del Análisis Matemático clásico: Límite, Continuidad, Derivadas e Integrales de funciones reales de una y varias variables. Esto quiere decir que el concepto de función se va a utilizar en todos los temas que se van a estudiar.

Para que se tenga una idea del concepto que vamos a estudiar, digamos que una función es una relación especial de entrada y salida similar a la que ocurren en los procesos productivos.

Durante el proceso de producción se integran ciertas particularidades (mercancías o servicios) llamados factores de producción que pierden su identidad y caduca su forma original para convertirse en otros sucesos (también mercancías o servicios) llamados productos. Por tanto, la cantidad de producto depende de las cantidades de cada uno de los factores de producción que intervinieron en el proceso productivo.

En el proceso de producción, casi siempre, interviene más de un factor de producción; sin embargo, muchas veces, la cantidad de producto se calcula a partir de la cantidad de uno solo de los factores de producción. De esta manera se obtiene una función que depende de una sola variable que se denomina función de producción. Por ejemplo:

a) La cantidad de maíz cosechada (producto) se puede obtener como función de la cantidad de semilla sembrada (factor de producción).
b) La cantidad de sillas (producto) que un carpintero puede fabricar se puede calcular en función de la cantidad de madera disponible (factor de producción).

Estos ejemplos son suficientes para darnos cuenta de la importancia del papel que juegan las funciones en la vida práctica, con énfasis en el campo de la Economía. Es por eso que al concluir este tema los estudiantes deben ser capaces de:

Resolver problemas relacionados con la vida, en particular económicos y matemáticos, conocidos o no, reales o simulados, utilizando el concepto de función y los demás aspectos asociados al mismo.

Para dar cumplimiento eficaz a este objetivo:

1.-El estudiante debe saber:

- Qué es una función y cuáles son sus propiedades generales,
- Cuáles son las funciones elementales básicas y las propiedades particulares de cada una,
- Cuáles son las operaciones que se pueden efectuar con funciones,
- Cuáles las funciones que se obtienen mediante operaciones con las funciones básicas,
- Cómo se determinan la pendiente y la intersección con los ejes de las funciones lineales,
- Cuál es el significado analítico de la pendiente de una función lineal,
- Cómo se determina la ecuación de una función lineal dadas dos condiciones,
- Cómo se representan gráficamente funciones lineales,
- Cómo se representan gráficamente funciones cuadráticas,
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales y cuadráticos
- Cuáles son las funciones más usadas en la economía y sus propiedades.

2.-El estudiante tiene que desarrollar habilidades para:

a) Representar gráficamente funciones lineales, potenciales, cuadráticas, logarítmicas exponenciales expresadas en forma simple y describir sus propiedades.
b) Determinar el dominio de una función cuando ésta viene dada mediante suma, diferencia, producto, cociente o composición de otras funciones.

c) Resolver problemas económicos cuyo modelo sea una función lineal tales como:
- Determinación de la función lineal correspondiente a dos condiciones económica dadas,
- Determinación de la pendiente e interpretación económicamente del resultado,
- Determinación de los puntos de intersección con los ejes e interpretación económica de dichos puntos,
- Representación gráficamente funciones lineales que describen problemas económicos,
- Interpretación económica de un punto cualquiera del gráfico.

d) Resolver problemas económicos cuyo modelo sea una función cuadrática como estos:
- Determinación de una función cuadrática a partir de una información económica dada,
- Determinación de las coordenadas del vértice e interpretación económica del resultado,
- Representación gráfica de funciones cuadráticas que describen problemas económicos,
- Interpretación económica de un punto cualquiera de la curva.

e) Resolver problemas de equilibrio como los siguientes:
- Determinación del punto equilibrio en modelos lineales,
- Representación gráfica del punto de equilibrio para modelos lineales,
- Determinación del punto de equilibrio en modelos cuadráticos,
- Análisis económico del punto de equilibrio.

1.1.-Definición de función

DEFINICIÓN. Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se llama función de A en B a toda regla f que a ciertos elementos x de A le hace corresponder un único elemento y de B. Se denota por

$$\begin{array}{rcl} f : A & \to & B \\ x & \to & y \end{array}.$$

A se llama conjunto de partida.

B se llama conjunto de llegada.

x es la variable independiente o argumento de f.

y es la variable dependiente, función o imagen de x por f (se escribe $y = f(x)$).

En general, la x no siempre abarca todos los elementos del conjunto de partida, ni la y toma como valores a todos los elementos del conjunto de llegada. Esto quiere decir que, generalmente, los valores de x forman un subconjunto de A, mientras que los valores de y forman un subconjunto de B. Estos dos subconjuntos juegan un papel importante en la formación del concepto de función y reciben el nombre de dominio e imagen de la función y se denotan por Dom f e Im f respectivamente.

$$\text{Dom } f = \{x \in A : f(x) \text{ está definida}\}$$
$$\text{Im } f = \{y \in B : y = f(x) \text{ para algún } x \in \text{Dom } f\}$$

Ejemplos:

1.-Si a cada libro de una biblioteca, que está escrito en español, se le hace corresponder la letra inicial del título, entonces se obtiene una función del conjunto de libros de dicha biblioteca en el alfabeto del idioma español. El dominio de esta función es el conjunto formado por los libros de la biblioteca, escritos en español. La imagen es el conjunto de aquellas letras del alfabeto español que son iniciales de, al menos, un libro.

2.-Cada nómina de pago constituye una función, pues en ellas a cada trabajador se le hace corresponder únicamente el salario devengado por él en el período de pago. En ese caso se forma una función del conjunto de trabajadores que están en la nómina y el conjunto de los números reales no negativos.

Nótese, en los ejemplos anteriores, que las correspondencias son unívocas. En caso contrario, o sea, si la correspondencia no es unívoca, no se forma una función.

Ejemplo:

3.-Si en la nómina se forma la correspondencia inversa a la del ejemplo 2, o sea, si a cada número real no negativo se le hace corresponder los trabajadores que han devengado esa cantidad de pesos en el período de pago, entonces no se forma una función por que puede haber más de un trabajador con el mismo salario.

1.2.-Funciones reales de una variable real

Como hemos visto para formar una función f de A en B, los conjuntos A y B pueden ser de cualquier naturaleza, sin embargo, en lo que sigue trabajaremos solamente con funciones en las que tanto el conjunto de partida como el de llegada es el conjunto de los números reales. Por tanto, si no se especifica lo contrario, siempre que hablemos de funciones nos estaremos refiriendo a funciones reales de una variable real.

En el estudio de estas funciones utilizaremos dos formas básicas para representarlas: la forma gráfica y la analítica.

La forma gráfica se obtiene representando en un sistema de coordenadas todos los puntos (x ; y) que se obtienen por la correspondencia f.

La forma analítica es aquella en la que la correspondencia se expresa a través de una ecuación y se especifica el dominio. Si no se especifica el dominio, se toma como tal el dominio de definición de la ecuación.

Ejemplo:

Supongamos que un padre puede comprar x litros de sirope para hacer refresco el día del cumpleaños de su niño y que por cada litro de sirope se pueden preparar 5 litros de refresco.

a) Determine la función de producción.

b) ¿Cuántos litros de refresco se pueden preparar con 3,75 litros de sirope?

c) ¿Qué cantidad se sirope se necesita para preparar 18 litros de refresco?

Solución:

x: litros de sirope.

y: litros de refresco.

a) La cantidad de refresco se puede a través de la ecuación $y = 5x$.

En este problema x e y tienen que ser mayores o iguales que cero, o sea,

$y \geq 0$, $5x \geq 0$, $x \geq 0$.

Luego $Dom\, f = \{x : x \geq 0\}$ e $\mathrm{Im}\, f = \{y : y \geq 0\}$.

Por tanto, la función de producción es $y = 5x$ con $x \geq 0$.

b) Para $x = 3{,}75$ obtenemos que $f(3{,}75) = 5 \cdot 3{,}75 = 18{,}75$.

Por tanto, con 3,75 L de sirope se pueden preparar 18,75 L de refresco.

c) Para $y = 18$ obtenemos $18 = 5x$, de donde resulta que $x = 3{,}6$.

Por tanto, para preparar 18L de refresco se necesitan 3,6L de sirope.

1.3.-Propiedades generales de las funciones reales

Las funciones reales de una variable real cumplen algunas propiedades que no se cumplen para cualquier tipo de función. Estas propiedades son: la simetría, la paridad, la monotonía, la existencia de extremos,

la concavidad y la existencia de puntos de inflexión. Las mismas serán utilizadas más adelante para describir el comportamiento las funciones, para trazar sus gráficos y para describir las características fundamentales de las funciones más utilizadas en la Economía y la Administración.

1.3.1.-Simetría con respecto a una recta

DEFINICIÓN. Una función f es simétrica con respecto a la recta $x = x_0$ si su dominio es simétrico con respecto a x_0 y se cumple que $f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$.

La recta $x = x_0$ es un eje de simetría del gráfico de la función. Por tanto, para trazar el gráfico de una función como ésta basta construir la parte del gráfico que queda a un lado de la recta $x = x_0$ y luego reflejarla sobre dicha recta.

Ejemplo:

1.-La función $f(x) = (x-1)^2$ es simétrica con respecto a la recta $x = 1$. Porque esta función está definida para todos los números reales por tanto su dominio es simétrico con respecto a cualquier número real, en particular con respecto a $x = 1$. Además, para todo número real x se cumple que

$$f(1-x) = (1-x-1)^2 = (-x)^2 = x^2 = (1+x-1)^2 = f(1+x).$$

La recta $x = 1$ es el eje de simetría del grafico de la función (Fig. 1.3.1)

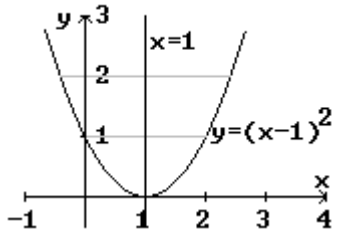


Figura 1. Simetría con respecto a una recta.

1.3.2.-Paridad

DEFINICIÓN. Una función f es par (impar) si su dominio es simétrico con respecto a cero y se cumple que $f(-x) = f(x)$ $\left(f(-x) = -f(x)\right)$.

Ejemplo:

1.-Analice la paridad de las siguientes funciones.

a) $y = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$; por tanto, $y = x^2$ es una función par.

b) $y = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -(x^3) = -f(x)$; por tanto, $y = x^3$ es una función impar.

c) $y = x + 5$

$f(-x) = -x + 5 = -(x-5) \neq \pm f(x)$; por tanto, $y = x + 5$ no es par ni impar.

Cuando la función es par, el gráfico es simétrico con respecto al eje y mientras que cuando es impar el gráfico es simétrico con respecto al origen de coordenadas. Vea los gráficos de $y = x^2$ y de $y = x^3$ en el epígrafe 1.4.3.

1.3.3.-Monotonía

DEFINICIÓN. Una función f es monótona creciente (decreciente) en un intervalo si para cualquier par de valores x_1, x_2 de ese intervalo tales que $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.
En otras palabras, la función es creciente cuando a medida que la x aumenta, la y aumenta y es decreciente si cuando la x aumenta, la y disminuye.

Ejemplo:

a) La función $y = x^2$ es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$ (Fig. 1.3.3)

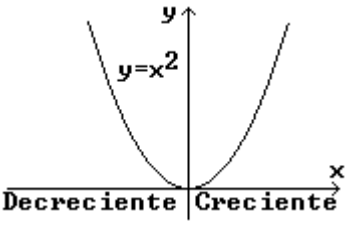


Figura 2. Monotonía.

1.3.4.-Existencia de extremos

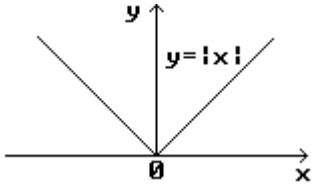
DEFINICIÓN. La función f alcanza su valor máximo (mínimo) en el punto x_0 si para todo $x \in$ Dom f se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$ $\left(f(x_0) \leq f(x)\right)$. A los valores máximo y mínimo de una función se les llama extremos absolutos o globales de la función.

Ejemplo:

1.-La función $y = |x|$ alcanza su valor mínimo en $x = 0$ porque para todo $x \in R$ se cumple que $|0| \leq |x|$ (Fig. 1.3.4a).

2.-La función $y = -x^2$ alcanza su valor máximo en $x = 0$, pues para todo $x \in R$ se cumple que $f(0) = 0 \geq -x^2$ (1.3.4b).

En el tema 4 estudiaremos los extremos locales y un método que permite determinar los mismos.



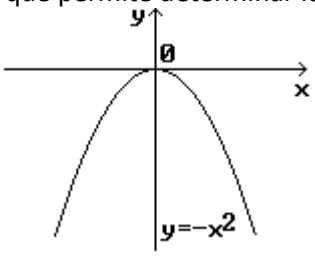


Figura 3. Existencia de extremos.

1.3.5.-Concavidad y punto de inflexión

DEFINICIÓN. Una función f es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en un intervalo si para cualquier punto de ese intervalo el gráfico queda por encima (por debajo) de la tangente. El punto del gráfico donde cambia la dirección de la concavidad se llama punto de inflexión.

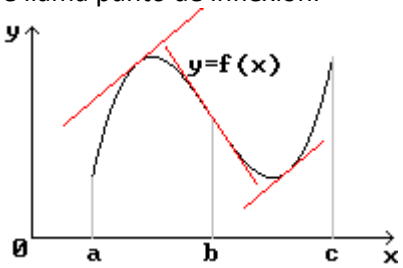


Figura 4. Concavidad y punto de inflexión.

En la figura 1.3.5, la función dada es cóncava hacia abajo en [a, b], cóncava hacia arriba en [b, c] y en $x = b$ el gráfico tiene un punto de inflexión. Nótese además que en el punto de inflexión la tangente atraviesa a la curva.

En otras palabras, la función es cóncava hacia arriba en el intervalo donde la curva abre hacia arriba y cóncava hacia abajo en el intervalo donde la curva abre hacia abajo.

Ejemplo:

a) La parábola normal $y = x^2$ es cóncava hacia arriba en todo R (ver el gráfico más adelante).

b) La parábola cúbica $y = x^3$ es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y cóncava hacia arriba para $x > 0$ y en (0; 0) tiene un punto de inflexión (ver el gráfico del epígrafe 1.4.3).

1.4.-Funciones elementales básicas

Para poder desarrollar con éxito un curso de matemática es necesario conocer las funciones elementales básicas con las que vamos a trabajar, así como sus propiedades fundamentales. Estas funciones son: las funciones constantes, la idéntica, las potenciales, las exponenciales y las logarítmicas. Se dice que estas son las funciones básicas porque las demás se obtienen a partir de estas mediante las operaciones aritméticas: adición, sustracción, multiplicación y división, mediante la composición o inversión de otras funciones.

1.4.1.-Función constante

DEFINICIÓN. Una función es constante si a cada número real x le asigna el mismo número real c. Se denota por $f(x) = c$ o $y = c$.

Propiedades:

1.-Está definida para todos los números reales, o sea, Dom f = R.

2.-Toma el número c como único valor, o sea, Im f = {c}.

3.-El gráfico es una recta paralela al eje x que corta al eje y en el punto (0; c) (Fig.1.4.1).

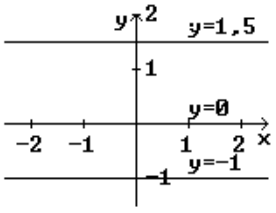


Figura 5. Función constante.

1.4.2.-Función idéntica

DEFINICIÓN. Se llama función idéntica a aquella que a cada número real x le asigna el propio número x. Se denota por $f(x) = x$ o $y = x$.

Propiedades:

1.-Está definida para todos los números reales, o sea, Dom f = R.
2.-Su imagen es el conjunto de los números reales.
3.-Su gráfico es la recta $y = x$ (Fig. 1.4.2)

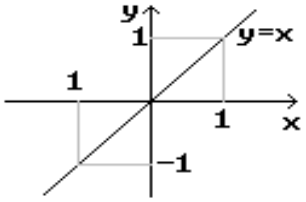


Figura 6. Función idéntica.

1.4.3.-Función potencial

DEFINICIÓN. Se llama función potencial de grado n a aquella que a cada número real x le asigna la potencia x^n. Se denota por $f(x) = x^n$ o $y = x^n$.

Propiedades:

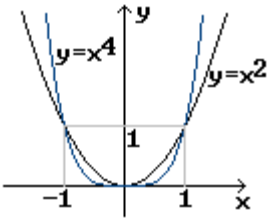
Las propiedades de las funciones potenciales dependen del exponente. Las funciones de exponente par tienen características distintas de las que tienen el exponente impar.

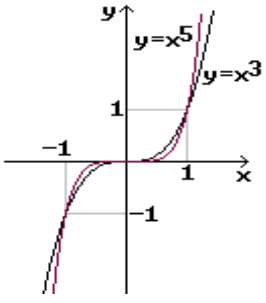
Para n par:

1.-Están definidas para todos los números reales, o sea, Dom f = R.
2.-Toman valores mayores o iguales que cero, o sea, $\text{Im } f = \{y \in R : y \geq 0\} = [0; +\infty[$
3.-Son decrecientes en $]-\infty; 0]$ y crecientes en $[0; +\infty[$.
4.-Alcanzan su valor mínimo en $x = 0$ y el valor mínimo es $f(0) = 0$.
5.-El gráfico es una parábola pasa por los puntos $(-1;1), (0;0), (1;1)$, tiene el mínimo en (0; 0) y es cóncava hacia arriba en todo R (Fig. 1.4.3 a).

Para n impar:

1.-Están definidas para todos los números reales, o sea, Dom f = R.
2.-Toman todos los números reales como valores, o sea, $\text{Im } f = R$.
3.-Son crecientes en todo R.
4.-El gráfico es una curva que pasa por los puntos $(-1;-1), (0;0), (1;1)$, es cóncava hacia abajo en $]-\infty; 0]$, cóncava hacia arriba en $[0; +\infty[$ tiene un punto de inflexión en (0; 0) (Fig. 1.4.3 b).





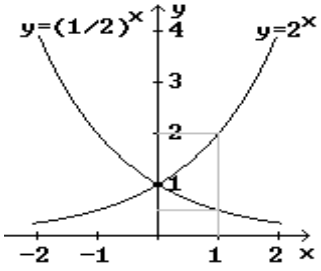


Figura 7.Función potencial.

1.4.4.-Función exponencial

DEFINICIÓN. Sea a un número real positivo y $a \neq 1$. Se llama función exponencial de base a a aquella que a cada número real x le asigna la potencia a^x. Se denota por $f(x) = a^x$ o $y = a^x$.

Propiedades:

Las propiedades de las funciones exponenciales dependen de la base. Si la base está entre cero y uno, la función tiene características distintas de la que tiene base mayor que uno.

Para $0 < a < 1$**:**

1.-Están definidas para todos los números reales, es decir, Dom f = R.

2.-Toman solamente valores positivos, es decir, $\text{Im } f = \{y \in R : y > 0\} =]0; +\infty[$.

3.-Es decreciente en todo R

4.-El gráfico es una curva que pasa por los puntos $(0;1)$ y $(1; a)$, es cóncava hacia arriba en todo R y se aproxima al eje x en $+\infty$ (Fig.1.4.4).

Para $a > 1$:

1.-Están definidas para todos los números reales, es decir, Dom f = R.

2.-Toman solamente valores positivos, es decir, $\text{Im } f = \{y \in R : y > 0\} =]0; +\infty[$.

3.-Es creciente en todo R

4.-El gráfico es una curva que pasa por los puntos $(0;1)$ y $(1; a)$, es cóncava hacia arriba en todo R y se aproxima al eje x en $-\infty$ (Fig. 1.4.4).

1.4.5.-Función logarítmica

DEFINICIÓN. Sea a un número real positivo distinto de 1. Se llama función logarítmica de base a, a la función $f : R \to R$ que a cada número real positivo x le asigna el logaritmo de x en base a. Se denota por $f(x) = \log_a x$ o $y = \log_a x$.

Propiedades:

Las propiedades de las funciones logarítmicas dependen de la base. Si la base está entre cero y uno, la función tiene características distintas de la que tiene base mayor que uno.

Para $0 < a < 1$**:**

1.-Está definida solo para los números reales positivos, es decir, $Dom\, f = \{x \in R : x > 0\}$.

2.-Recorre el conjunto de los números reales, es decir, Im f = R.

3.-Es decreciente en todo su dominio.

4.- $f(1) = \log_a 1 = 0$.

5.- $f(a) = \log_a a = 1$.

7.-El gráfico es una curva que pasa por los puntos $(1;0)$ y $(a;1)$, es cóncava hacia arriba $]0;+\infty[$ y se aproxima a la parte positiva del eje y por la derecha de cero (Fig. 1.4.5).

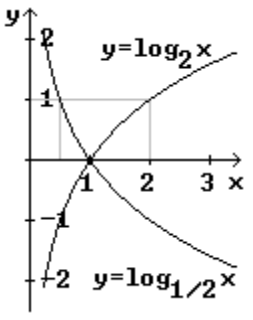


Figura 8. Función logarítmica.

Para $a > 1$:

1.-Está definida solo para los números reales positivos, es decir, $Dom\, f = \{x \in R : x > 0\}$.

2.-Recorre el conjunto de los números reales, es decir, Im f = R.

3.-Es crecientes en todo su dominio.

4.- $f(1) = \log_a 1 = 0$.

5.- $f(a) = \log_a a = 1$.

6.-El gráfico es una curva que pasa por los puntos $(1;0)$ y $(a;1)$, es cóncava hacia arriba $]0;+\infty[$ y se aproxima a la parte negativa del eje y por la derecha de cero (Fig. 1.4.5).

1.5.-Función inversa

DEFINICIÓN. Sea $\begin{matrix} f : R \to R \\ x \to y \end{matrix}$ una función monótona. Se llama función inversa de f, a la función $\begin{matrix} f^{-1} : R \to R \\ y \to x \end{matrix}$. En este caso $Dom\, f^{-1} = \text{Im}\, f$ e $\text{Im}\, f^{-1} = Dom\, f$.

Si $y = f(x)$, para obtener la ecuación la función inversa se despeja x en función de y, o sea, $x = f^{-1}(y)$ y luego se intercambian las variables con lo que se obtiene $y = f^{-1}(x)$.

Teniendo en cuenta que los puntos (x, y) y (y, x) son simétricos con respecto a la recta $y = x$, el gráfico de $y = f^{-1}(x)$ es la imagen del gráfico de $y = f(x)$ por una reflexión sobre la recta $y = x$.

Ejemplos:

a) La función $y = x^2$ con $x \geq 0$ creciente; por tanto, tiene inversa. Determinemos la inversa.

Despejando a x obtenemos $x = \sqrt{y}$ e intercambiando las variables se obtiene la función $y = \sqrt{x}$, llamada función raíz cuadrada, que es la inversa de $y = x^2$ para $x \geq 0$ (Fig. 1.5.1).

b) La función $y = x^3$ es creciente en todo R. Por tanto, tiene inversa. Determinemos la inversa.

En este caso $x = \sqrt[3]{y}$ (Fig. 1.5.2).

Intercambiando las variables se obtiene la función $y = \sqrt[3]{x}$, llamada función raíz cúbica, que es la inversa de $y = x^3$.

c) La función $y = a^x$ es monótona en todo R, por tanto, existe la función inversa.

En este caso $x = \log_a y$ e intercambiando las variables se obtiene la función logarítmica de base a, $y = \log_a x$, que es la inversa de la función exponencial de la misma base (Fig. 1.5.3).

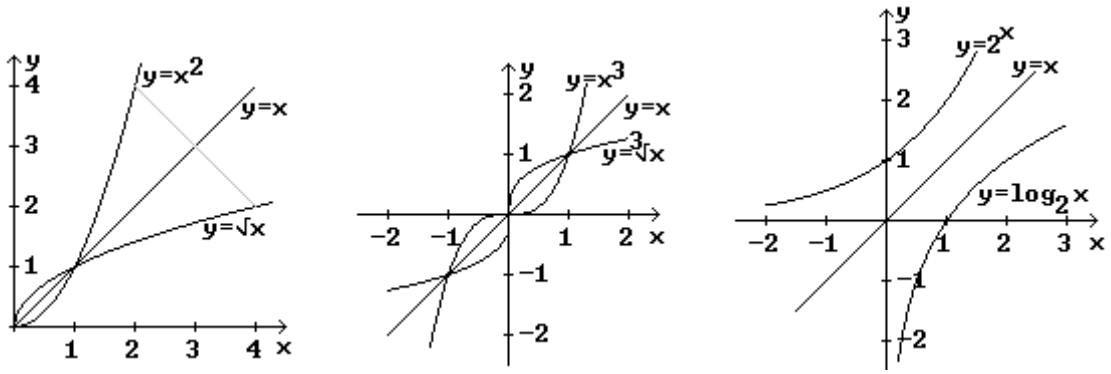


Figura 9. Función inversa.

1.6.-Operaciones aritméticas con funciones

DEFINICIÓN. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones de R en R. Entonces para todo $x \in Dom\, f \cap Dom\, g$ se pueden definir las funciones siguientes:

Suma: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Diferencia: $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (En este caso debe cumplirse además que $g(x) \neq 0$).

Ejemplo:

1.-Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 3^x$. Entonces:

a) $(f+g)(x) = \sqrt{x} + 3^x$ b) $(f-g)(x) = \sqrt{x} - 3^x$ c) $(f \cdot g)(x) = \sqrt{x}\cdot 3^x$ d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{3^x}$

1.7.-Función compuesta

DEFINICIÓN. Sean f y g dos funciones tales que Dom $f \cap \mathrm{Im}\, g \neq \phi$. Entonces para todo $x \in$ Dom g tal que $g(x) \in$ Dom f se define la función compuesta $f \circ g$ (se lee: "f o g") de la manera siguiente

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)].$$

Ejemplos:

1.-Sean las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = 3x+5$. Entonces:

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \ln[g(x)] = \ln(3x+5)$ para $x > -5/3$.

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\ln x] = 3(\ln x)+5$ para $x > 0$.

En este ejemplo se puede observar que $f \circ g \neq g \circ f$. Esto quiere decir que, en general, la composición de funciones no es conmutativa.

2.- Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$ con $x \geq 0$. Entonces:

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x}] = (\sqrt{x})^2 = x$

Nótese que en este caso la función compuesta, en cualquier orden, da como resultado la función idéntica. Esto no es una casualidad. Eso debe a que las funciones dadas en este ejemplo son mutuamente inversas y se cumple que:

$$f[f^{-1}(x)] = f^{-1}[f(x)] = x .$$

1.8.-Funciones que se obtienen mediante operaciones aritméticas

Existe un gran número de funciones que se usan para modelar problemas económicos, como veremos más adelante, que se obtienen a partir de las funciones elementales básicas mediante operaciones aritméticas de las funciones. Entre ellas están la función proporcionalidad directa, la función proporcionalidad inversa, las funciones lineales, las cuadráticas, las racionales enteras y las racionales fraccionarias. A continuación, vamos a repasar las definiciones y las propiedades más importantes, así como su representación gráfica.

1.8.1.-Función proporcionalidad directa

DEFINICIÓN. Se llama función proporcionalidad directa a aquella que a cada número real x le asigna el producto de x por una constante $k \neq 0$. Se denota por $y = kx$.
En este caso se dice que y es directamente proporcional a x. A k se le llama factor o coeficiente de proporcionalidad directa.

Propiedades:

1.-Está definida para todos los números reales.
2.-Recorre todo el conjunto de los números reales.
3.-Para $x = 0,\ y = 0$.
4.-El factor de proporcionalidad k es la tasa de variación de y con respecto a x. Si $k > 0$, la función es creciente e y aumenta k unidades por cada unidad que aumente x. Si $k < 0$, la función es decreciente e y disminuye $|k|$ unidades por cada unidad que aumente x.

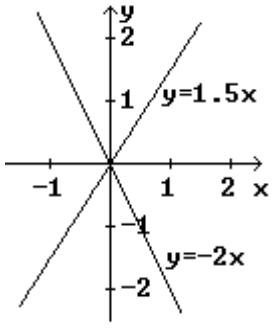


Figura 10. Función proporcionalidad directa.

5.-Su gráfico es la recta que pasa por el origen y tiene pendiente k (Fig. 1.8.1)

Ejemplos:

1.-Supongamos que se desean vender q unidades de un producto a $3 cada unidad. Entonces el ingreso I por concepto de venta (vea función de ingreso) es el producto de 3 por q, o sea,

$$I = 3q .$$

En este caso, el ingreso es directamente proporcional a la cantidad de producto. Además, el ingreso aumenta a razón de $3 por cada unidad que se venda.

2.-Si se compran x kg de harina a $1,50 el kilogramo, el gasto G del consumidor se obtiene multiplicando x por 1,50, o sea,

$$G = 1{,}5\,x$$

El gasto es directamente proporcional a la cantidad de harina comprada y el factor de proporcionalidad es 1,5. Eso significa que el gasto aumenta en $1,50 por cada kilogramo de harina que se compre.

1.8.2.-Función proporcionalidad inversa

DEFINICIÓN. Se llama función proporcionalidad inversa a aquella que a cada número real $x \neq 0$ le asigna el cociente de una constante $k \neq 0$ dividida por x. Se denota por $y = \frac{k}{x}$.
En este caso se dice que y es inversamente proporcional a x. A k se le llama coeficiente de proporcionalidad inversa.

Propiedades:

1.-Está definida para todos los números reales distintos de cero.

2.-Recorre todo el conjunto de los números reales distintos de cero.

3.-Si $k > 0$, la función es decreciente y si $k < 0$, la función es creciente.

4.-Su gráfico es una curva denominada hipérbola la cual está dividida en dos ramas. Si $k > 0$, tiene una rama en el cuadrante I, que es cóncava hacia arriba, y la otra en el cuadrante III que es cóncava hacia abajo. Si $k < 0$ tiene una rama en el cuadrante II, que es cóncava hacia arriba, y la otra en el cuadrante IV que es cóncava hacia abajo (Fig. 1.8.2)

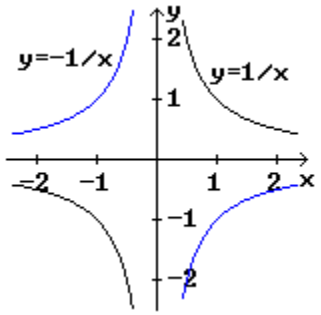


Figura 11. Función proporcionalidad inversa.

5.-Es impar porque $f(-x) = -f(x)$. Por tanto, su gráfico es simétrico con respecto al origen de coordenadas, de ahí que para trazar el mismo solo se trace una de las ramas, preferentemente la que queda en el I o II cuadrante según sea el sigo de k, y la otra se obtiene por una rotación de $180°$ con centro en el origen.

Ejemplo:

1.-Para trazar el gráfico de $y = \frac{1}{x}$, podemos confeccionar una tabla como la siguiente.

x	1/3	1/2	1	2	3
y	3	2	1	1/2	1/3

Localizando estos puntos en el sistema de coordenadas y uniéndolos con una curva cóncava hacia arriba se obtiene la rama de la hipérbola situada en el primer cuadrante. Luego, localizando los puntos simétricos a estos con respecto al origen, se obtiene la rama de la hipérbola que queda en el III cuadrante (Fig. 1.8.2)
Cuando aparecen dos variables económicas que son inversamente proporcionales, generalmente solo hay que utilizar la rama del primer cuadrante para estudiar el problema pues estas casi siempre son no negativas.

Ejemplo:

2.-Supongamos que una persona tiene que comprar q unidades de un producto a un precio p cada unidad y que el gasto total tiene que ser de $5. Entonces

$$p \cdot q = 5 \quad \text{ó} \quad q = \frac{5}{p}.$$

En este caso la cantidad de producto es inversamente proporcional al precio y el factor de proporcionalidad inversa es 5 que es positivo. Eso significa que, si aumenta el precio, para mantener el gasto en $5, hay que disminuir la cantidad de producto a comprar. Si por el contrario el precio disminuye, entonces se puede aumentar la cantidad de producto. Dejamos al lector la realización del gráfico de esta función.

1.8.3.-Función lineal

DEFINICIÓN. Se llama función lineal a aquella que se puede expresar en la forma $y = mx + n$ donde m y n son constantes y $m \neq 0$.

Propiedades:

1.-Está definida en todo R.

2.-Para $x = 0,\ y = n$.

3.-m es la tasa de variación de y con respecto a x. Si $m > 0$ la función es creciente y el valor de m indica lo que aumenta y, cuando x aumenta en una unidad. Si $m < 0$ la función es decreciente $|m|$ representa la cantidad que, y disminuye, cuando x aumenta en uno.

4.-El gráfico es la recta que pasa por el punto (0; n) y que tiene pendiente m.

Para trazar el gráfico de una función lineal

- se determinan dos puntos que satisfagan la ecuación,
- se ubican en el plano los dos puntos obtenidos,
- finalmente se traza la recta que pasa dichos puntos.

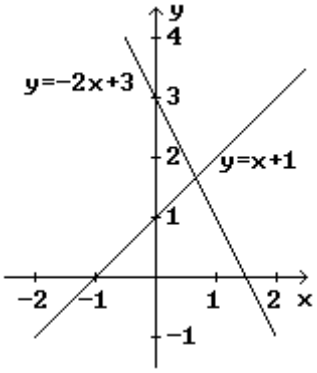


Figura 12. Función lineal.

Ejemplos:

1.-Represente gráficamente las funciones.

a) $y = x + 1$

Para $x = 0,\ \ y = 1.$

Para $x = 1,\ \ y = 2.$

La recta pasa por los puntos (0; 1) y (1; 2) (Fig. 1.8.3)

b) $y = -2x + 3$

Para $x = 0,\ \ y = 3.$

Para $x = 1,\ \ y = 1.$

La recta pasa por los puntos (0; 3) y (1; 1) (Fig. 1.8.3)

1.8.4.-Función cuadrática

DEFINICIÓN. Se llama función cuadrática a aquella que se puede expresar en la forma $y = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Propiedades:

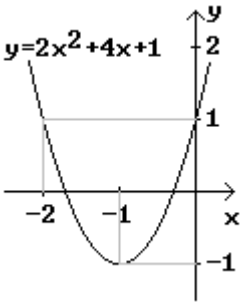
1.-Esta definida para todos los números reales.

2.-Su gráfico es la parábola que tiene que tiene el vértice en el punto para el cual $x = -\frac{b}{2a}$, es simétrica con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$, es cóncava hacia arriba si $a > 0$ y cóncava hacia abajo si $a < 0$, en el vértice tiene un mínimo si $a > 0$ y un máximo si $a < 0$.

De acuerdo con la segunda propiedad, para trazar el gráfico de una función cuadrática se determina el vértice, se hallan dos puntos simétricos con respecto a la recta $x = -\frac{b}{2a}$ y se traza la parábola que pasa por los tres puntos obtenidos.

Ejemplos:

1.-Trace el gráfico de la función $y = 2x^2 + 4x + 1$



En este caso $a = 2;\ b = 4;\ c = 1$.

La abscisa del vértice $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1$.

La ordenada del vértice es $y = f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) + 1 = -1$.

El vértice de la parábola es $(-1;-1)$.

$x = -1$ es el eje de simetría de la parábola; por tanto, $f(-1+1) = f(-1-1)$, o sea, $f(0) = f(-2)$.

Fig. 1.8.5

Como $f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = 1$, la parábola por los puntos $(-2;1),\ (0;1)$ (Fig. 1.8.5)

2.-Trace el gráfico de la función $y = -x^2 + 2x$

Aquí $a = -1;\ b = 2;\ c = 0$.

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$

$f(1) = -1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

El vértice es (1; 1)

El eje de simetría es la recta $x = 1$; por tanto, $f(1+1) = f(1-1)$, o sea, $f(2) = f(0)$.

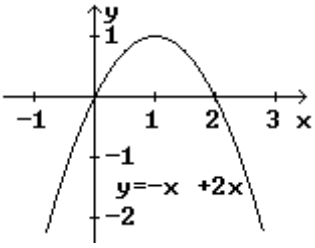


Figura 13: Función cuadrática.

Como $f(0) = -1 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0$, la parábola pasa por los puntos (0; 0) y (2; 0).

1.8.5.-Función racional entera

DEFINICIÓN. Se llama función racional entera o polinómica de grado n, a aquella que tiene la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$.

Ejemplos:

a) Las funciones constantes $y = c$ son racionales enteras de grado cero.

b) Las funciones lineales $y = mx + n$ son racionales enteras de grado 1.

c) Las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ son racionales enteras de grado 2.

Cuando el grado es mayor que 2 es necesario utilizar otras herramientas, que veremos más adelante, para determinar las propiedades de estas funciones y poder trazar su gráfico.

1.8.6.-Función racional fraccionaria

DEFINICIÓN. Se llama función racional fraccionaria a aquella que viene expresada por el cociente de dos polinomios, o sea, la que tiene la forma $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$ donde el polinomio del denominador es distinto de cero.

Ejemplos:

a) $y = \dfrac{1}{x}$ con $x \neq 0$ b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ con $x \neq \pm 2$.

Para el estudio de estas funciones es necesario el uso de otras herramientas que se abordarán en las aplicaciones de la derivada.

1.9.-Funciones más utilizadas en la Economía

Las funciones más utilizadas en el análisis económico son: la función producción (expuesta en la introducción), la función de demanda, la función de oferta, la función de precio, la función de costo, la función de ingreso, la función de ganancia, la función de consumo y la función de ahorro.

A partir de estas funciones, denominadas funciones totales, se obtienen las funciones medias, las funciones marginales y las funciones de elasticidad.

Definamos a continuación las funciones totales y más adelante estudiaremos las demás.

1.9.1.-Función de demanda

Para cada nivel de los precios de un producto, existe una cantidad de ese producto que los consumidores están dispuesto a comprar en un período determinado. Dicha cantidad de producto se llama demanda.

Por lo general, a medida que aumenta el precio, disminuye la demanda y cuando el precio disminuye, la demanda aumenta.

Si la demanda es de q unidades de producto y p es el precio de cada unidad, entonces la ecuación que relaciona a p y q se denomina ecuación de demanda y su gráfica, representando a q en el eje horizontal y a p en el eje vertical, se denomina gráfica de demanda.

Si en la ecuación de demanda se despeja q en función de p, se obtiene la función de demanda que, cuando es lineal, se puede expresar en la forma

$$q = m\,p + n$$

m, que por lo general es negativa, es la tasa de variación de la demanda con respecto al precio, o sea, el valor absoluto de m es lo que disminuye la demanda cuando el precio aumenta en $1.

Ejemplo:

1.-Supóngase que la demanda semanal de un producto es de 200 unidades, si el precio es de $100 por unidad y es de 100 unidades, si el precio es de $150 cada una.

a) Hallar la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

b) Interprete económicamente el parámetro m.

Solución:

a) q: unidades de producto demandas.

p: precio de cada unidad de producto (en $)

$q_1 = 200;\ \ q_2 = 100$

$p_1 = 100;\ \ p_2 = 150$

La pendiente de la función de demanda es

$$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{100 - 200}{150 - 100} = \frac{-100}{50} = -2$$

Como la función tiene pendiente $m = -2$ y pasa por punto (100; 200) la función de demanda tiene la forma general

$$q - q_1 = m\,(p - p_1)$$
$$q - 200 = -2\,(p - 100)$$
$$q - 200 = -2\ p + 200$$

La función de demanda es $q = -2\ p + 400$.

b) La pendiente es $m = -2$. Esto significa que cuando el precio aumenta en $1, la demanda disminuye en 2 unidades de producto.

1.9.2.-Función de oferta

En respuesta a los diversos precios que los productos adquieren en determinados períodos, existe una cantidad de producto que los fabricantes están dispuestos a vender en el mercado. Esta cantidad de producto se llama oferta.

Por lo general, cuando mayor es el precio, mayor es la oferta y cuanto menor es el precio, menor es la oferta.

Si la oferta es de q unidades de producto y p es precio de cada unidad, entonces la ecuación que relaciona p y q, se llama ecuación de oferta y su gráfica, representando a q en el eje horizontal y a p en el eje vertical, se llama gráfica de oferta.

Si en la ecuación de oferta se despeja q en función de p, se obtiene la función de oferta que, cuando es lineal, se puede expresar en la forma

$$q = m\,p + n$$

m, que por lo general es positiva, es la tasa de variación de la oferta con respecto al precio, o sea, el valor de m es lo que aumenta la oferta cuando el precio aumenta en $1.

Ejemplo:

1.-Supongamos que un fabricante oferta 180 unidades de su producto cuando el precio es de $10 y 390 unidades cuando el precio es de $25.

a) Determine la función de oferta.

b) Interprete el parámetro m.

Solución:

a) q: unidades de producto ofertadas.

p: precio de cada unidad de producto (en $)

$q_1 = 180;\ \ q_2 = 390$

$p_1 = 10;\ \ \ p_2 = 25$

La pendiente de la función de oferta es

$$m = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1} = \frac{390-180}{25-10} = \frac{210}{15} = 14$$

.

Como la función tiene pendiente $m = 14$ y pasa por punto (10; 180) la función de demanda tiene la forma general

$$q - q_1 = m\,(p - p_1)$$
$$q - 180 = 14\,(p - 10)$$
$$q - 180 = 14p - 140$$

La función de oferta es $q = 14p + 40$.

b) $m = 14$. Esto significa que cuando el precio aumenta en $1, la oferta aumenta en 14 unidades de producto.

1.9.3.-Función de precio

Como planteamos en los epígrafes anteriores, los economistas para trazar las curvas de oferta y de demanda representan a q en el eje horizontal y a p en el eje vertical. Ahora bien, desde el punto de vista matemático, en el eje horizontal se presenta la variable independiente y el eje vertical la función. Esto quiere decir que la curva de oferta no es el gráfico de la función de oferta y la curva de demanda tampoco es el gráfico de la función de demanda porque en estas funciones p es la variable independiente y q la función.

En realidad, lo que los economistas llaman curva de oferta (de demanda) es el gráfico de lo que matemáticamente sería la función de precio. Esta función se obtiene a partir de la ecuación de oferta (de demanda) despejando a p en función de q. En el caso de que p y q estén relacionados a través de una ecuación lineal, la función de precio se puede expresar en la forma

$$p = mq + n$$

.

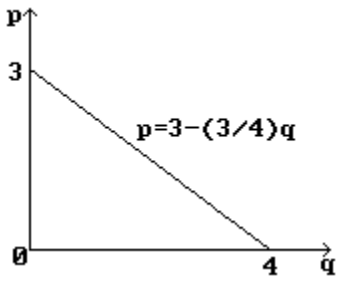
m: Económicamente, es la tasa de variación del precio con respecto a la demanda (o a la oferta) y geométricamente, es la pendiente de la curva de demanda (o de oferta) según sea el caso.

n, que es el valor que toma p cuando $q = 0$, se puede interpretar como el precio para el cual los consumidores no están dispuesto a comprar o que los fabricantes no están dispuestos a vender, según q sea oferta o demanda respectivamente.

Ejemplos:

1.-La ecuación de demanda de un producto es $4p + 3q = 12$.

a) Obtenga la función de precio correspondiente.



b) Trace la curva de demanda.
c) Interprete económicamente la pendiente de la gráfica de demanda.
d) Interprete la intersección del gráfico con el eje vertical.

Solución:

a) $4p+3q=12$

$p=3-\frac{3}{4}q$

b) Busquemos dos puntos de línea de demanda.

$p(0)=3-\frac{3}{4}(0)=3$. La gráfica pasa por el punto (0; 3).

$p(4)=3-\frac{3}{4}(4)=0$. La gráfica pasa por el punto (4; 0).

c) $m=-\frac{3}{4}$. Esto significa que el consumidor comprará una unidad de producto más, cuando el precio disminuya en \$0,75

d) Si el precio es de \$3, los consumidores no están dispuestos a comprar.

2.-La función de oferta de un producto es $q=3p-9$

a) Obtenga la función la función de precio correspondiente.
b) Trace la gráfica de oferta.
c) Interprete económicamente la pendiente de la curva de oferta.
d) Interprete la intersección del gráfico con el eje vertical.

Solución:

a) $q=3p-9$

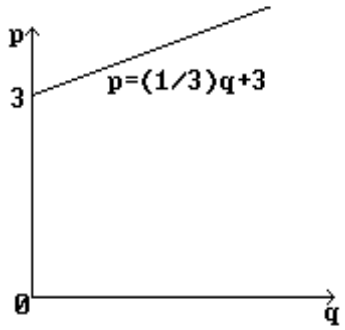
$p=\frac{1}{3}q+3$ Función de precio

b) Busquemos dos puntos de la gráfica de oferta.

Para $q=0,\quad p=3$.

Para $q=6,\quad p=5$.

La gráfica de oferta es la recta que pasa por los puntos (0; 3) y (6; 5).



c) $m=\frac{1}{3}$. Por tanto, cuando el precio aumenta en \$1/3 el fabricante ofertará una unidad más.

d) Para $q=0,\quad p=8$, es decir, si el precio es de \$8 el fabricante no realiza ninguna oferta.

1.9.4.-Función de costo

El costo total C de una empresa es la suma del costo variable C_v y del costo fijo C_f, o sea,

$$C=C_v+C_f.$$

El costo fijo es la suma de todos los gastos generales de la empresa que no dependen del nivel de producción como la renta, seguros, agua, teléfono, electricidad, etc. Esto costo hay que pagarlo independientemente que se produzca o no.

El costo variable es la suma de todos los gastos que dependen del nivel de producción, como el costo de la mano de obra, de los materiales, el mantenimiento por desgastes y roturas, etc.

Ejemplo:

1.-Una empresa fabrica un producto a un costo de \$6 por unidad de producto y el costo fijo es de \$80.

a) Determine la función de costo total.
b) Determine el costo de producción 500 unidades de producto.

c) Si la empresa solo dispone de $6080, ¿cuántas unidades de producto puede fabricar?

Solución:

a) q: unidades de producto fabricadas.

C: costo total (en $).

$C_0 = 80$ Costo fijo.

$C_1 = 6$ Costo unitario.

El costo variable es $C_v = 6q$. Por tanto, la función de costo total es $C = 6q + 80$.

b) $C(500) = 6 \cdot 500 + 80 = 3080$. Por tanto, el costo de producción de 500 unidades de producto es de $3080.

c) Haciendo $C = 6080$ y sustituyendo este valor en la ecuación de costo nos queda

$$6080 = 6q + 80$$

$$6000 = 6q$$

$$q = 1000$$

Concluimos entonces que con un presupuesto de costo de $6080 la empresa nada más puede fabricar 1000 unidades de producto.

1.9.5.-Función de ingreso

El ingreso total es el efectivo que la empresa recibe por la venta de su producción. Matemáticamente el ingreso se calcula multiplicando la cantidad de producto vendida por el precio al que fue vendida cada unidad. Por tanto, si se venden q unidades de producto a un precio p cada una, entonces el ingreso total es I viene dado por

$$I = p \cdot q$$

Ejemplo:

1.-El precio unitario del producto de un fabricante es $p = 100 - 2q$ donde q es la demanda semanal por parte de los consumidores.

a) Determine la función de ingreso total.

b) Hallar el nivel de producción que maximizan el ingreso.

c) Hallar el ingreso máximo.

d) Construya el gráfico de la función de ingreso.

Solución:

a) q: unidades de producto demandadas.

I: ingreso total (en $).

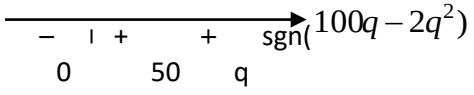
$p = 100 - 2q$ Precio unitario (en $ / unidad).

El ingreso total es $I = pq = (100 - 2q)q = 100q - 2q^2$. Ahora bien, el ingreso y la cantidad de producto tienen que ser positivos, o sea, $100q - 2q^2 > 0$.

$$100q - 2q^2 = 0$$

$$-2q(q - 50) = 0$$

$$q = 0; \quad q = 50$$



De aquí resulta que $100q - 2q^2 > 0$ para $0 < q < 50$; por tanto, la función de ingreso es $I = 100q - 2q^2$ con $0 < q < 50$.

b) En la ecuación de ingreso: $a = -2;\ b = 100;\ c = 0$. Cómo $a < 0$, la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y su punto máximo es el vértice. Por tanto, el nivel de producción que maximiza el ingreso es el valor de q en el vértice, o sea,

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2(-2)} = 25.$$

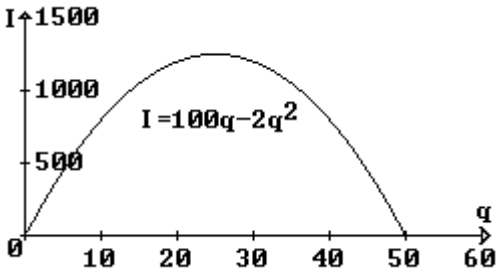
Esto quiere decir que el ingreso es máximo cuando se fabrican 25 unidades de producto.

c) El ingreso máximo se obtiene evaluando la función de ingreso para $q = 25$, es decir, $I(25) = 100 \cdot 25 - 2(25)^2 = 1250$. El ingreso máximo es de \$1250.

d) El vértice de la parábola es (25; 1250). Hallemos los ceros.

$$100q - 2q^2 = 0$$
$$-2q(q - 50) = 0$$
$$q = 0;\ \ q = 50.$$

La parábola corta al eje horizontal en los puntos (0; 0) y (50; 0).



1.9.7.-Función de ganancia (o pérdida)

Para determinar el resultado R alcanzado por una empresa en su gestión económica en un período determinado, se halla la diferencia del ingreso total I menos el costo total C, o sea,

$$R = I - C.$$

Cuando $R > 0$ se dice que hay ganancia y cuando $R < 0$ se dice que hay pérdida. Por tanto, la ecuación anterior representa la función de ganancia o la función de pérdida en dependencia de que $R > 0$ o que $R < 0$ respectivamente.

Cuando $R = 0$ la empresa ni gana ni pierde, o sea, está en equilibrio. Esto ocurre cuando el ingreso es igual al costo.

La cantidad de producto para la cual $I = C$ se llama cantidad de equilibrio y valor común del ingreso y el costo se llama valor de equilibrio.

Ejemplo:

1.-El costo unitario de fabricación de un producto es de \$5, el precio de venta de cada unidad es de \$10 y el costo fijo de la empresa es de \$40.

a) Halle la función de costo total.
b) Halle la función de ingreso total.
c) Determine la función de ganancia.
d) Determine la función de pérdida.
e) ¿Cuántas unidades hay que vender para tener ganancia de \$35?
f) ¿Cuál es nivel de producción que provoca pérdidas por valor de \$10?
g) Halle el punto de equilibrio y haga el análisis económico correspondiente.

Solución:

a) q: unidades de producto.

$C_0 = 40$ Costo fijo.

$C_1 = 5$ Costo unitario de producción.

C: costo total (en $).

La función de costo total es $C = 5q + 40.$

b) $p = 10$ precio unitario de venta

I: ingreso total (en $).

La función de ingreso total es $I = 10q$

c) R: resultado (en $).

La ecuación de resultado es $R = I - C = 10q - (5q + 40) = 5q - 40$.

Hay ganancia cuando $R > 0$, o sea, cuando

$$5q - 40 > 0$$
$$q > 8$$

La función de ganancia es $R = 5q - 40; \quad q > 8.$

d) Hay pérdida cuando $R < 0$, es decir, cuando

$$5q - 40 < 0$$
$$q < 8$$

La función de pérdida es $R = 5q - 40; \quad q < 8.$

e) Para que haya ganancia de $35, tiene que cumplirse que $R = 35$, o sea, que

$$5q - 40 = 35$$
$$q = 15$$

Para tener ganancia de $35 hay que vender 15 unidades de producto.

f) Hay pérdidas por valor de $10, cuando $R = -10$, es decir, cuando

$$5q - 40 = -10$$
$$q = 6$$

El nivel de producción que provoca pérdidas por valor de $10 es de 6 unidades de producto.

g) La empresa está en equilibrio cuando $I = C$, o sea, si $10q = 5q + 40$ de donde $q = 8$

Para $q = 8$ se obtiene $I = C = \$80$

Cuando se producen 8 unidades de producto, la empresa no gana ni pierde, pues con esa cantidad ingresa exactamente los $80 que invirtió para producirlas.

1.9.8.-Funciones de consumo y ahorro

Se llama consumo a aquella parte del ingreso total que las personas gastan en bienes y servicios generales; la otra parte del ingreso se llama ahorro.

Uno de los problemas que debe resolver el consumidor es como va a distribuir sus ingresos, es decir, determinar cuánto va a consumir y cuánto va a ahorrar. Está claro que el consumo y el ahorro están en dependencia del ingreso total.

Sea I el ingreso total del consumidor y C la cantidad destinada al consumo, entonces la función de consumo es aquella que expresa a C en función de I, o sea,

$$C = f(I)$$.

Por su parte el ahorro es la diferencia entre el ingreso y el consumo. Si denotamos por A el ahorro, entonces la función de ahorro es

$$A = I - C$$.

Ejemplo:

1.-Supongamos que el consumo es \$275 si el ingreso es de \$400 y es de \$350 cuando el ingreso es de \$500.

a) Halle la función de consumo suponiendo que es lineal.

b) Interprete económicamente la pendiente.

c) Halle la función de ahorro.

d) Halle la propensión marginal al ahorro.

Solución:

a) I: ingreso total (en \$).

C: consumo (en \$).

$C_1 = 275;\ \ C_2 = 350.$

$I_1 = 400;\ \ I_2 = 500.$

La forma general de la función de consumo es $C - C_1 = m(I - I_1)$, donde

$$m = \frac{350-275}{500-100} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$.

Por tanto,

$$C - 275 = 0{,}75(I - 400),$$

$$C - 275 = 0{,}75I - 300,$$

La función de consumo es $C = 0{,}75I - 25$.

b) La pendiente es $m = 0{,}75$, o sea, la propensión marginal al consumo es de 75 centavos por cada peso de ingreso. Esto quiere decir que el consumidor gasta 75 centavos por cada peso que aumente el ingreso.

c) A: Ahorro (en \$).

$$A = I - C = I - (0{,}75I - 25) = 0{,}25I + 25.$$

d) La propensión marginal al ahorro es $m = \$0{,}25$ por peso de ingreso. Esto quiere decir que el ahorro del consumidor aumenta en 25 centavos por cada peso que aumente su ingreso.

1.9.9.-Equilibrio de mercado

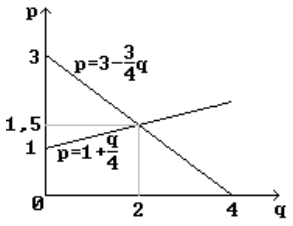
Para realizar de una operación de compra-venta tiene que haber un acuerdo entre el fabricante y el consumidor. Para esto tiene que existir un precio p_0 que el consumidor esté dispuesto pagar por la misma cantidad q_0 del producto que el fabricante está dispuesto a vender a ese precio.

Geométricamente (q_0, p_0) es el punto de intersección entre la curva de oferta y la curva de demanda y se llama punto de equilibrio, p_0 se llama precio de equilibrio y q_0 se llama cantidad de equilibrio.

Ejemplos:

1.-Sea $4p + 3q = 12$ la ecuación de demanda diaria de un producto cuya ecuación de oferta es $4p - q = 4$.

a) Halle el punto de equilibrio.



b) Haga el análisis económico correspondiente al punto de equilibrio.

c) Represente las curvas de oferta y demanda en un mismo sistema y señale el punto de equilibrio.

Solución:

a) El punto de equilibrio es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4p+3q=12 & (1) \\ 4p-\ q=\ 4 & (2) \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones miembros a miembro se obtiene

$$4q=8$$

$$q=2$$

Sustituyendo a q en (2) se obtiene

$$4p-2=4$$

$$p=1{,}5$$

El punto equilibrio es (2; 1,50)

b) Esto quiere decir que al precio de $1,50 por unidad el fabricante elaborará exactamente las 2 unidades de producto que los consumidores están dispuestos a comprar a ese precio diariamente.

c) La ecuación de oferta, se puede escribir en la forma $p=\frac{1}{4}q+1$.

Para $q=0,\ \ p=1$. Por tanto, la gráfica de oferta pasa por el punto (0; 1) y por el punto de equilibrio (2; 1,50).

La ecuación de demanda se puede escribir en la forma $p=3-\frac{3}{4}q$.

Para $q=0,\ \ p=3$. Por tanto, la gráfica de demanda pasa por el punto (0; 3) y por el punto de equilibrio (2; 1,50).

2.-Halle el punto de equilibrio si las ecuaciones de oferta y de demanda del producto son $q=4p-40$ y $pq=800$ respectivamente. Haga el análisis económico correspondiente.

Solución:

Resolvamos el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{cases} q=4p-40 & (1) \\ pq=800 & (2) \end{cases}.$$

Sustituyamos (1) en (2)

$$p(4p-40)=800$$

$$4p^2-40p-800=0$$

$$p^2-10p-200=0$$

$$(p+10)(p-20)=0$$

$$P=-10;\ \ p=20$$

El valor $p=-10$ no es admisible porque p tiene que ser positivo. Por tanto, el precio de equilibrio es de $20.

Sustituyendo p por 20 en (1) se obtiene

$$q=4(20)-40=40,$$

o sea, la cantidad de equilibrio es de 40 unidades de producto.

Finalmente obtenemos que el punto de equilibrio es (40; 20). Esto quiere decir que a un precio de $20 el fabricante elaborará exactamente las 40 unidades de producto que los consumidores están dispuestos comprar a ese precio.

Ejercicios

1.-Represente gráficamente las siguientes funciones y describa sus propiedades.

a) $y = 4$ b) $y = -\frac{2}{3}$ c) $y = 4{,}3$

d) $y = 4^x$ e) $y = (\frac{3}{4})^x$ f) $y = (\frac{3}{2})^x$

g) $y = \log_5 x$ h) $y = \log_{3/4} x$ i) $y = \log_{3/2} x$

2.-Determine los valores indicados para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 7;\ \ f(0),\ \ f(-3),\ \ f(5),\ \ f(t).$

b) $g(x) = 8;\ \ g(4),\ \ g(0{,}01),\ \ g(-156),\ \ g(x+5).$

c) $h(x) = \sqrt{x-1};\ \ h(1),\ \ h(10),\ \ h(t+1),\ \ h(x^2).$

d) $\varphi(u) = \dfrac{\sqrt{u+4}}{u};\ \ \varphi(-4),\ \ \varphi(21),\ \ \varphi(u-4),\ \ \varphi(t^2+7).$

e) $v(t) = \begin{cases} 4 & \text{si } t < 2 \\ 8 - t^2 & \text{si } t > 2 \end{cases};\ \ v(-2),\ \ v(0),\ \ v(5).$

f) $C(q) = \begin{cases} q & \text{si } -1 \le q \le 0 \\ 3 - q & \text{si } 0 \le q \le 3 \\ 2q^2 & \text{si } 3 \le q \le 5 \end{cases};\ \ C(0),\ \ C(4),\ \ C(-\frac{1}{2}),\ \ C(\frac{1}{3}).$

3.-Determine el dominio de definición de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$ b) $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)$

c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ d) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

e) $f(x) = 19$ f) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{5-x}}$

4.-Hallar $f \circ g$, $g \circ f$ y determine el dominio de ambas.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1};\ \ g(x) = x + 2$

b) $f(x) = \log x;\ \ g(x) = x^3 + 3x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x+1};\ \ g(x) = x^2 + 5$

5.-Obtenga la ecuación y trace la recta que tiene las siguientes propiedades.

a) Pasa por el punto (1; 2) y tiene pendiente 6.

b) Pasa por el origen y su pendiente es –5.

c) Pasa por los puntos (1; 4) y (8; 7).
d) Pasa por los puntos (3; -1) y (-2; -9).
e) Pasa por el punto (-3; -2) y es horizontal.
f) Pasa por el punto (2; -3) y es vertical.
g) Pasa por el origen y es vertical.

6.-Exprese las siguientes funciones en la forma $y = mx + n$, obtenga los puntos de intersección con los ejes, trace el gráfico e interprete analíticamente la pendiente.

a) $x - 1 = 5y + 3$ b) $4x + 2y - 6 = 0$

c) $y - 7 = 3(x - 4)$ d) $x = \frac{1}{3}y$

7.-Trace el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas, hallando el vértice y dos puntos simétricos de la parábola.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$ b) $f(x) = x^2 - 1$ c) $I(q) = -9 + 8q - 9q^2$

d) $v(s) = s^2 + 6s + 11$ e) $s(t) = t^2 + 2t + 1$ f) $s(t) = 2t^2 + 3t - 2$

g) $y = 3x^2 + 5$ h) $y = -2x^2 + 3x + 5$ i) $y = x^2 + 4x + 5$

k) $y = 3x^2 + 12x + 1$ l) $y = -2x^2 - 8x$ m) $y = -x^2 + 4x + 2$

8.-Los consumidores demandan 40 unidades de un producto si el precio es de $12 por unidad y 25 unidades cuando el precio es de $18.

a) Halle la función de demanda suponiendo que es lineal.
b) Calcule la demanda cuando el precio es de $15.
c) Halle la función de precio.
d) Calcule el precio unitario cuando la demanda es de 30 unidades.
e) Interprete económicamente la pendiente de las funciones de demanda y de precio.
f) Hallar el precio para el cual los consumidores no compran.

9.-Si un fabricante de zapatos coloca en el mercado 50000 pares de zapatos cuando el precio de cada par es de $35 y 35000 cuando el precio es de $30,

a) obtenga la función de oferta,
b) obtenga la función de precio,
c) hallar la oferta cuando el precio es 33,
d) hallar el precio que no le conviene al productor,
e) interprete económicamente la pendiente de las funciones de precio y de oferta.

1.-Las ecuaciones de oferta y de demanda de un producto son $40p - q = 400$ y $p \cdot q = 8000$ respectivamente, donde p es el precio unitario y q la cantidad de producto.

a) ¿Qué cantidad de producto demandan los consumidores si el precio es de $16?
b) ¿Qué cantidad de producto oferta el fabricante cuando el precio es de $16?
c) Determine el punto de equilibrio de mercado y haga el análisis económico correspondiente.

10.-Supongamos que hay que gastar $40 para fabricar 10 unidades de un producto y $70 para fabricar 20 unidades.

a) Determine la función de costo suponiendo que es lineal.
b) Calcular el costo de producción de 35 unidades de producto.
c) Hallar el nivel de producción que se puede alcanzar con un presupuesto de costo de $100.

11.-El valor de una maquinaria disminuye en un 10% anual con respecto a su valor original que es de $8000.

a) Obtenga la función que permite hallar el valor de la maquinaria al cabo de t años de explotación con $0 \le t \le 10$.

b) Trace el gráfico de la función.

b) Interprete económicamente la pendiente.

12.-La señora Caridad fue al mercado a comprar x libras de arroz e y libras de frijoles. Cada libra de arroz cuesta $3 y la libra de frijoles cuesta $6.

a) Obtenga la ecuación que permita determinar todas las combinaciones que se pueden adquirir con $30.

b) Hallar la tasa de variación de la cantidad de arroz con respecto a la cantidad de frijoles. Interprete el resultado.

c) Hallar la tasa de variación de la cantidad de frijoles con respecto a la cantidad de arroz. Interprete el resultado.

d) Si Caridad compra 3 libras de arroz, ¿cuántas puede llevar de frijoles?

e) ¿Cuántas libras de arroz puede comprar, si tiene que llevar 3 libras de frijoles?

13.-El precio unitario de un producto es $p = 1200 - 3q$ donde q es la demanda semanal.

a) Hallar la función de ingreso.

b) Hallar el nivel de producción que maximiza el ingreso.

c) Hallar el ingreso máximo.

14.-El precio unitario de un producto es $p = 3q + 10$ donde q es la oferta del fabricante.

a) Hallar la función que expresa el gasto del consumidor.

b) Hallar el costo de adquisición de 10 unidades de producto.

15.-Una empresa comercializadora ha estimado que m meses después de la introducción del producto nuevo de un cliente, h millares de hogares lo estarían utilizando. Si sabe que $h = \frac{10}{9} m(12 - m)$ con $0 \le m \le 12$,

a) Hallar el número máximo de hogares en que se empleará dicho producto.

b) ¿A los cuántos meses se logra el resultado del inciso a)?

16.-A continuación, se dan las ecuaciones de oferta y de demanda (en ese orden) de un producto, donde p es el precio unitario y q es el número de unidades en un período determinado. Determine el punto de equilibrio de mercado y haga el análisis económico del mismo.

a) $p = \frac{3}{100} q + 2; \quad p = -\frac{7}{100} q + 12.$

b) $p = \frac{1}{2000} q + 3; \quad p = -\frac{1}{1500} q + \frac{42}{5}.$

c) $35q - 2p = -250; \quad 65p + q = 537{,}5.$

d) $246p - 3.25q = 2460; \quad 410p + 3q = 14452{,}5.$

e) $p = 2q + 20; \quad p = 200 - 2q^2.$

f) $p = (q + 10)^2; \quad p = 388 - 16q - q^2.$

g) $p = \sqrt{q + 10}; \quad p = 20 - q.$

h) $p = \frac{1}{5} q + 5; \quad p = \frac{3000}{q + 20}.$

17.-A continuación, se dan las ecuaciones de ingreso y costo totales, donde q son las unidades de producto vendidas y fabricadas respectivamente. Halle el punto de equilibrio del fabricante y haga el análisis económico correspondiente.

a) $I = 3q; \quad C = 2q + 4500.$

b) $I = 14q; \quad C = \frac{40}{3} q + 120.$

c) $I = 0{,}05q; \quad C = 0{,}85q + 600.$

d) $I = 0{,}25q; \quad C = 0{,}16q + 360.$

e) $I = 100 - \frac{1000}{q+10}; \quad C = q + 40.$

f) $I = 0{,}1q^2 + 7q; \quad C = 2q + 500.$

18.-Las ecuaciones de oferta y de demanda de cierto producto son $3q - 200p + 180 = 0$ **y** $3q - 100p + 1800 = 0$ **respectivamente donde p es el precio unitario y q las unidades de producto en determinado período. Halle el precio de equilibrio, represéntelo gráficamente y haga el análisis económico.**

19.-El fabricante de un producto vende todo lo que produce a $7 la unidad y el costo total es $C = 6q + 800$ **donde q es el nivel de producción. Halle el nivel de producción en el punto de equilibrio, trace la gráfica y haga el análisis correspondiente.**

20.-Un fabricante vende todo lo que produce a $8,35 por unidad. El costo fijo es de $2116 y el variable es de $7,20 por unidad.

a) Obtenga la función de resultado.

b) ¿Qué ocurre si la producción es de 100 unidades de producto?

b) ¿Qué pasa si el nivel de producción alcanza las 2000 unidades?

c) ¿A qué nivel de producción se obtiene una ganancia de $4600?

d) ¿A qué nivel de producción habrá pérdidas de $1150?

21.-Las ecuaciones de oferta y de demanda de cierto producto son $3q - 200p + 2325 = 0$ **y** $3q + 100p - 2175 = 0$ **respectivamente donde p es el precio unitario y q las unidades de producto en determinado período. Halle el precio de equilibrio, represéntelo gráficamente y haga el análisis económico correspondiente.**

22.-Las ecuaciones de oferta y de demanda de un producto son $pq = 200$ **y** $p - 2q = 0$ **respectivamente, donde p es el precio unitario y q la cantidad de producto. Halle el punto de equilibrio e interprete el resultado económicamente.**

23.-Los consumidores demandan 50 unidades de producto si el precio es de $2 por unidad y 40 unidades, cuando el precio es de $4. La ecuación de oferta es $20p - q = 200$**, donde p es el precio unitario y q la oferta.**

a) Halle la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

b) Determine el punto de equilibrio de mercado.

c) Haga el análisis económico del punto de equilibrio.

24-Un zapatero ingresa $150 por cada par de botas que venda. La fabricación de par le cuesta $100 y el costo fijo es de $350.

a) Halle la ganancia del zapatero cuando vende 10 pares de botas.

b) Halle el punto de equilibrio.

c) Haga el análisis del punto de equilibrio.

CAPÍTULO 2. LÍMITE Y CONTINUIDAD

Hasta el momento, para trazar el gráfico de una función nos hemos apoyado en puntos del gráfico que se obtienen evaluando directamente la función y en las propiedades de las mismas que ya se conocen. Sin embargo, la evaluación de una función en un punto, en muchos casos, no es suficiente para analizar el comportamiento de ella alrededor de dicho punto.

Por otro lado, la mayoría de las funciones con las que vamos a trabajar están definidas en intervalos de la forma $]-\infty;b[$, $]-\infty;+\infty[$ o $]a;+\infty[$ y, como se sabe, una función no se puede evaluar en el infinito.

Además, puede suceder que el dominio de la función esté fragmentado por uno o más puntos en los cuales la función no esté definida y, por tanto, no se puede evaluar en esos puntos.

Para resolver los tres problemas planteados anteriormente es necesario introducir el concepto de límite, el cual marca el paso de la Matemática Elemental a la Matemática Superior. El límite es el concepto fundamental de la Matemática Superior porque los otros tres conceptos básicos de la misma: continuidad, derivada e integral, se definen a partir de un límite.

Por todo lo expuesto anteriormente, al finalizar este tema los estudiantes deben ser capaces de:

Analizar el comportamiento de una función de una variable en un punto (perteneciente a su dominio o no), en el infinito, en un intervalo o en todo su dominio, utilizando el cálculo de límites y las propiedades de las funciones continuas.

Para dar cumplimiento a este objetivo:

1.-**El estudiante debe saber:**

- a qué se denomina límite de una función y cuáles son las distintas formas de pasar al límite,

- interpretar geométricamente cada resultado obtenido en el cálculo del límite,

- cuáles son las reglas de cálculo de límites, cuándo y cómo se aplican,

- cuándo una función es continua en un punto, en un intervalo y en su dominio,

- cómo se analiza la continuidad de una función en un punto y en un intervalo,

- cuáles son las propiedades de las funciones continuas.

2**.-El estudiante debe desarrollar habilidades para:**

- calcular límites en un punto y en el infinito,

- analizar la continuidad en un punto y en un conjunto,

- aplicar el cálculo de límites y las propiedades de las funciones continuas para analizar el comportamiento local y global de las funciones.

2.1.-Límite ordinario

DEFINICIÓN. La función $f(x)$ tiene límite L cuando x tiende a x_0 si para todo número real $\varepsilon > 0$, existe otro número real $\delta > 0$ tal que sí $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta$, entonces $|\, f(x) - L \,| < \varepsilon$.

Se escribe: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. Se lee: "el límite de f (x), cuando x tiende a x_0, es igual a L".

También se escribe: $y \to L$, cuando $x \to x_0$. Se lee: "y tiende a L, cuando x tiende a x_0".

De acuerdo con la definición, $x \to x_0$ si para cualquier número real positivo δ, tan pequeño como se quiera, es posible encontrar un valor de $x \neq x_0$ tal que $|\, x - x_0 \,| < \delta$, o sea:

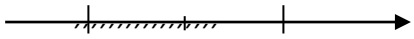
$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < \delta + x_0$$

$$x \in \,]x_0 - \delta\,;\, \delta + x_0[\,.$$

Este intervalo se llama vecindad o entorno de centro x_0 y radio δ. Se denota por $V(x_0, \delta)$. Cuando no hace falta señalar el radio de escribe $V(x_0)$. Si en el entorno se consideran solamente los puntos $x \neq x_0$ (se excluye el centro), entonces se denomina entorno reducido y se denota por $V^*(x_0, \delta)$ o $V^*(x_0)$ según sea el caso.

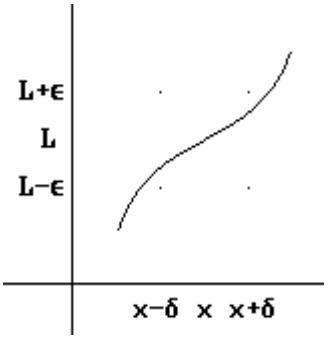
$V(x_0, \delta)$



$x_0 - \delta \quad x_0 \quad x_0 + \delta$

Análogamente, $f(x) \to L$ si cualquiera que sea el número real positivo ε, tan pequeño como se quiera, es posible encontrar un valor de y tal que $y \in \,]L - \varepsilon\,; L + \varepsilon[\,.$

Lo anterior significa que, en el gráfico, una vez fijado el valor de $\varepsilon > 0$, todo valor de $y = f(x)$ situado en el intervalo $]L - \varepsilon\,; L + \varepsilon[$ es imagen de un valor de x situado en el intervalo $]x_0 - \delta\,; x_0 + \delta[$ (Fig. 2.1).



Observaciones:

1.- $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ equivale a decir que $y \to L$, cuando $x \to x_0$. Esto, geométricamente, significa que cuando $x \to x_0$, el gráfico converge en el punto $(x_0 ; L)$ (Fig. 2.2; 2.3; 2.4).

2.-Como el gráfico converge en el punto $(x_0 ; L)$ cuando $x \to x_0$, la curva no siempre pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ (Fig. 2.3).

3.-La curva pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ únicamente cuando el valor de la función en x_0 y el límite coinciden (Fig. 2.2).

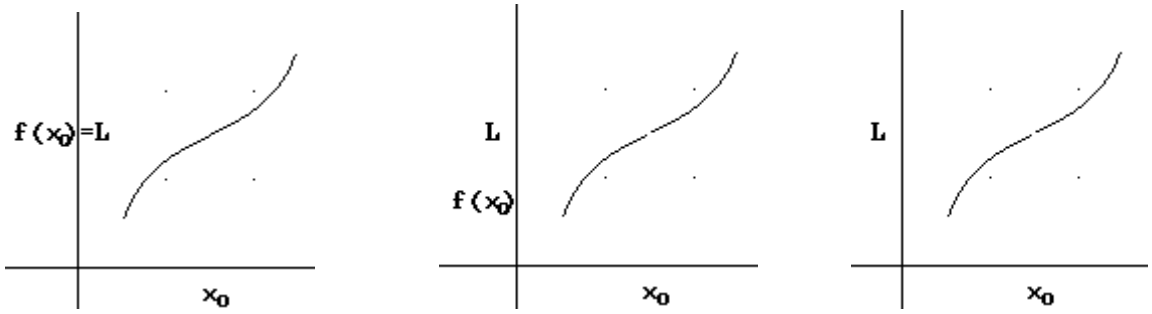


Figura 14. Límite ordinario.

De las observaciones anteriores se deduce que en el proceso de paso al límite no importa que el valor de la función no coincida con el límite, ni siquiera es importante que la función esté definida en dicho punto; basta que esté definida en un entorno reducido del punto.

TEOREMA (de unicidad). Si una función tiene límite en un punto, este es único.

Esto quiere decir que cualquiera que sea la forma en que x se aproxime a x_0, la función siempre se va a aproximar al mismo valor L.

2.2.-Límite de las funciones básicas en los puntos de su dominio

Como se sabe, el gráfico de las funciones elementales básicas se traza uniendo todos los puntos que se obtienen al evaluar directamente la función. Esto se debe a que todas las funciones elementales básicas cumplen con la condición expuesta en la figura 2.2, o sea, que el límite coincide con el valor de la función en el punto. En correspondencia con esto, el límite de las funciones elementales básicas, cuando x tiende a un punto de su dominio, se obtiene evaluando directamente la función en dicho punto.

Ejemplos:

a) $\lim_{x \to -2} 8 = 8$; b) $\lim_{x \to -5} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$; c) $\lim_{x \to 10} \sqrt{5} = \sqrt{5}$.

d) $\lim_{x\to -4} x = -4$; e) $\lim_{x\to 6} x^2 = 6^2 = 36$; f) $\lim_{x\to -1} x^5 = (-1)^5 = -1$.

g) $\lim_{x\to 0} 10^x = 10^0 = 1$; h) $\lim_{x\to -1} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$; i) $\lim_{x\to 3} 5^x = 5^3 = 125$.

j) $\lim_{x\to 3} \log_3 x = \log_3 3 = 1$; k) $\lim_{x\to 25} \log_5 x = \log_5 25 = 2$; l) $\lim_{x\to 1} \log_4 x = \log_4 1 = 0$

Interpretación:

En todos estos ejemplos el límite coincide con el valor de la función, por tanto, la interpretación geométrica es similar. Por ejemplo, en el inciso c), $\lim_{x\to 6} x^2 = 36$ significa que $y \to 36$, cuando $x \to 6$ y, por tanto, la curva $y = x^2$ pasa por el punto (6; 36).

2.3.-Límite de las operaciones con funciones

TEOREMA. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$, entonces:

a) $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = A \pm B$: El límite de la suma es la suma de los límites;

b) $\lim_{x\to x_0} (f \cdot g)(x) = A \cdot B$: El límite del producto es el producto de los límites;

c) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$: El límite del cociente es el cociente de los límites (si $B \neq 0$);

d) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{A}$: El límite de una raíz es la raíz del límite;

e) $\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B$: El límite de una potencia es el límite del base elevado al límite del exponente.

Ejemplos:

2.4.-Regla de cancelación

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3}{x+3} = \frac{\lim_{x\to 2} 5x^3}{\lim_{x\to 2} (x+3)} = \frac{\lim_{x\to 2} 5 \cdot \lim_{x\to 2} x^3}{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3} = \frac{5 \cdot 2^3}{2+3} = 8$$

b) $\lim_{x\to 3}\sqrt{\frac{x^2+7}{x+6}}=\sqrt{\lim_{x\to 3}\frac{x^2+7}{x+6}}=\sqrt{\frac{3^2+7}{3+6}}=\frac{4}{3}$

c) $\lim_{x\to 8}\left(\frac{x+2}{x-6}\right)^{2x-14}=\left(\lim_{x\to 8}\frac{x+2}{x-6}\right)^{\lim_{x\to 8}(2x-14)}=\left(\frac{10}{2}\right)^2=25$

El resultado obtenido en el inciso a) significa que $y\to 8$, cuando $x\to 2$, es decir, la curva $y=\frac{5x^3}{x+3}$ pasa por el punto (2; 8) (Nótese que límite y el valor de la función en 2 son iguales). Interprete los demás.

La regla del cociente exige que el límite del denominador sea distinto de cero. Si el límite del denominador es cero y el del numerador no, se obtiene un caso de indefinición que trataremos más adelante. Sin embargo, cuando el numerador y el denominador tienden a cero simultáneamente, se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$ que, en algunos casos, se puede resolver aplicando la regla de cancelación.

TEOREMA (Regla de cancelación). Sean f y g dos funciones definidas en una vecindad de x_0 y que para $x\neq x_0$ se cumple que $f(x)=g(x)$. El límite de una de ellas existe si y solo si existe el límite de la otra y en ese caso se cumple que $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-x-20}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+4)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+4)}{(x+5)}=\frac{9}{10}$

b) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x})^2-3^2}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}$.

El resultado obtenido en el inciso a) significa cuando $x\to 5$, $y\to\frac{9}{10}$ y, por tanto, la curva $y=\frac{x^2-x-20}{x^2-25}$ converge en el punto $(5;\frac{9}{10})$, pero no pasa por él, porque la función no está definida en 5).

2.5.-Límites laterales

Al analizar el comportamiento de una función en un punto, se presentan casos en que no se puede calcular el límite ordinario directamente. Esto se debe a dos razones: una es que la función sólo esté definida a un lado del punto y la otra es que la función esté definida por expresiones distintas en ambos lados del punto.

En estos casos hablamos de los límites laterales (derecho o izquierdo) de la función f en el punto para diferenciarlo del límite ordinario; por tanto, cuando hablemos del límite, sin especificar el lado, se refiere al límite ordinario.

Para los límites laterales utilizaremos las notaciones siguientes:

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$: se lee "límite de f (x) cuando x tiende a x_0 por la derecha".

$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$: se lee: "límite de f (x) cuando x tiende a x_0 por la izquierda".

De acuerdo con el teorema de unicidad del límite, para que exista el límite de una función en punto es necesario y suficiente que existan y sean iguales los límites laterales, o sea,

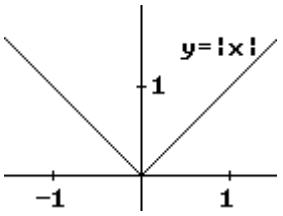
$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ sí y solo $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

Las reglas de cálculo del límite ordinario estudiadas anteriormente se aplican, sin alteración, al cálculo de los límites laterales.

Ejemplos:

a) Analice si existe el límite de la función $y = |x|$ en cero.

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^-} |x| = 0$$

; por tanto, existe el límite ordinario y también es igual a cero, o sea, $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Esto significa que cuando $x \to 0$, tanto por la izquierda como por la derecha, $y \to 0$; por tanto, el gráfico de $y = |x|$ converge en el punto (0; 0) por ambos lados de cero (Fig. 2.5).

b) Analice si existe el límite de la función $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ -1 & si \quad x < 0 \end{cases}$ cuando x tiende a cero.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x \neq \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x$$

.

Conclusión: No existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$.

En este caso, si $x \to 0^-$, $y \to -1$, entonces el gráfico de $y = \operatorname{sgn} x$ converge en el punto (0; -1). Si $x \to 0^+$, $y \to 1$, entonces el gráfico de $y = \operatorname{sgn} x$ converge en el punto (0; 1).

Nótese además que $f(0) = 0$; por tanto, se produce un salto en el gráfico (Fig. 2.6).

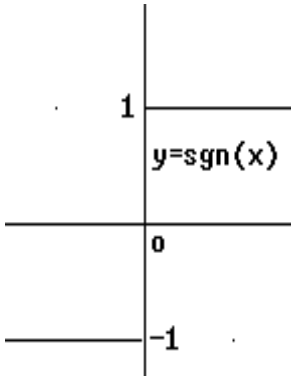


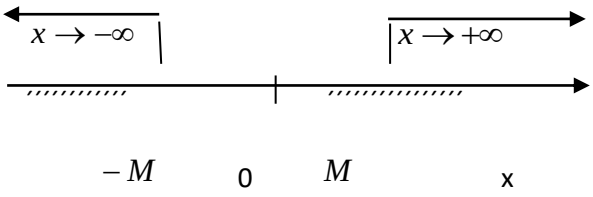
Figura 15. Límites laterales.

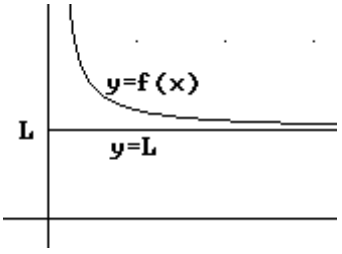
2.6.-Límite real en el infinito

DEFINICIÓN. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ sí para todo número $\varepsilon > 0$, existe otro número $M > 0$ tal que sí $|x| > M$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ahora bien, $x \to \infty$ si cualquiera que sea el número real positivo M, tan grande como se quiera, es posible encontrar un valor de x tal que $|x| > M$, o sea, $x < -M$ o $x > M$.

Cuando se considera solamente que $x > M$ se dice que $x \to +\infty$ y cuando solo se considera que $x < -M$, se dice que $x \to -\infty$.

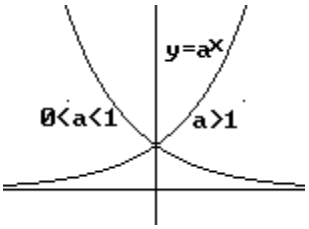




Geométricamente, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, significa que cuando $|x|$ crece ilimitadamente, entonces $y \to L$; por tanto, el gráfico de la función se aproxima a la recta $y = L$ (Fig. 2.7)

La recta $y = L$ se llama asíntota horizontal del gráfico de $y = f(x)$ cuándo $x \to -\infty$ o cuando $x \to +\infty$ según sea el caso. Fig. 2.7

De acuerdo con las características observadas en el gráfico de las funciones constantes y exponenciales (Fig. 2.8) se puede inferir que:



a) $\lim_{x\to\infty} c = c$;

b) $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ para $a > 1$;

c) $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ para $0 < a < 1$.

Fig. 2.8

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\infty} 5 = 5$. Esto significa que a medida que $|x|$ crece ilimitadamente, $y = 5$; por tanto, la recta $y = 5$ y la asíntota horizontal coinciden.

b) $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$. Esto significa cuando $x \to -\infty$, $y \to 0$; por tanto, la curva $y = 2^x$ se aproxima a la recta $y = 0$, o sea, la recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 2^x$ cuando $x \to -\infty$.

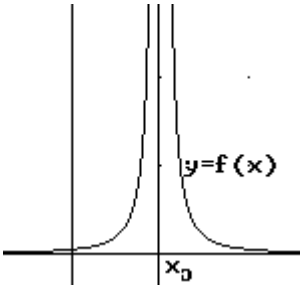
c) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$. Esto significa cuando $x \to +\infty$, $y \to 0$; por tanto, la curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ se aproxima a la recta $y = 0$. La recta $y = 0$ (eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ cuando $x \to +\infty$.

2.7.-Límite infinito en un número real

Se dice que una función es infinitamente grande o que es un infinito en x_0 si se cumple que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

DEFINICIÓN. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ sí para todo número $M > 0$, existe otro número $\delta > 0$ tal que sí $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x)| > M$.

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, eso quiere decir que cuando $x \to x_0$, $y \to \infty$; por tanto, el gráfico de la función $y = f(x)$ se aproxima a la recta $x = x_0$ (Fig. 2.9).

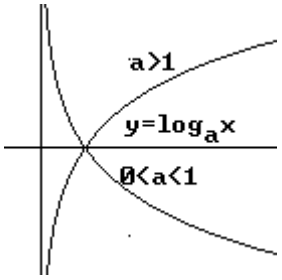


La recta $x = x_0$ se llama asíntota vertical del gráfico por la izquierda y/o por la derecha según sea el caso. El punto x_0 se llama polo de la función.

Figura 16: Límite infinito en un número real.

De acuerdo con las características observadas en el gráfico de las funciones logarítmicas (Fig. 2.10), se puede inferir que

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ -\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$$



Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x = -\infty$. Esto significa que cuando $x \to 0^+$, $y \to -\infty$; por tanto, la curva $y = \log_2 x$ se aproxima a la parte negativa de la recta $x = 0$, o sea, el eje y es una asíntota vertical de $y = \log_2 x$ por la derecha. Fig. 2.10

b) $\lim_{x\to 0^+} \log_{1/2} x = +\infty$. Esto significa que cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$; por tanto, la curva $y = \log_2 x$ se aproxima a la parte positiva de la recta $x = 0$, o sea, el eje y es una asíntota vertical de $y = \log_{1/2} x$ por la derecha.

2.8.-Límite infinito en el infinito

De manera análoga al caso anterior, podemos decir que una función es infinita en el infinito si se cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

DEFINICIÓN. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ sí para todo número $M > 0$, existe otro número $K > 0$ tal que sí $|x| > K$, entonces $|f(x)| > M$.

En estos casos no existe una interpretación geométrica específica. Solo se puede deducir el cuadrante en que se encuentra el gráfico de acuerdo con el signo del infinito a que tienden x e y.

De acuerdo con las características observadas en los gráficos de las funciones potenciales (Fig. 2.11), exponenciales (Fig. 2.8) y logarítmicas (Fig. 2.10), se pueden deducir las siguientes reglas.

a) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si n es par} \\ -\infty & \text{si n es impar} \end{cases}$

c) $\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$

d) $\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$

e) $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{si } 0<a<1 \\ +\infty & \text{si } a>1 \end{cases}$

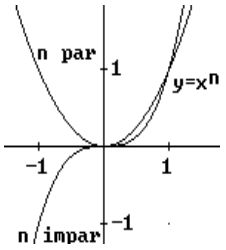


Figura 17. Límite infinito en el infinito.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} x^5 = -\infty$

e) $\lim_{x\to+\infty} 5^x = +\infty$

f) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = +\infty$

g) $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$

h) $\lim_{x\to-\infty} \log_{1/4} x = -\infty$

2.9.-Reglas de cálculo con infinitos y números reales

Con la introducción de los límites impropios, $-\infty$ y $+\infty$, se hace necesario operar simultáneamente con infinitos y números reales. Para eso consideraremos el conjunto de los números reales ampliado: $\overline{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, donde son válidas ciertas reglas que daremos a continuación.

Sea k un número real. Entonces se cumple que:

1) $k \pm \infty = \pm \infty$

2) $-\infty - \infty = -\infty$

3) $+\infty + \infty = +\infty$

4) $k \cdot \infty = \infty \quad (k \neq 0)$

5) $\infty \cdot \infty = \infty$

6) $\frac{k}{\infty} = 0$

7) $\frac{\infty}{k} = \infty$

8) $\frac{k}{0} = \infty \quad (k \neq 0)$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty + 2 = +\infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} (x^3+5) = -\infty + 5 = -\infty$

c) $\lim_{x\to-3} \frac{5x}{x+3} = \frac{-15}{0} = \infty$

d) $\lim_{x\to+\infty} (\log_{2/3} x - \log x) = -\infty - \infty = -\infty$

2.10.-Indeterminaciones

Al analizar el comportamiento de una función en un punto o en el infinito, quedan indeterminados los siete casos siguientes:

$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad 0\cdot\infty;\quad 0^0;\quad \infty^0;\quad 1^\infty$.

Algunas de estas indeterminaciones se pueden resolver aplicando la regla de cancelación, como ya hemos visto, las propiedades de las operaciones de cálculo y otros artificios matemáticos.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}$ conduce a la indeterminación $\frac{0}{0}$. Apliquemos la regla de cancelación.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-8x+16}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)^2}=\lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x-4}=\infty$$

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x}$ conduce a la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Apliquemos las propiedades de la potencia.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{3^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^x+1}{4^x+3^x+5}$ conduce a $\frac{\infty}{\infty}$. Dividamos cada término por la exponencial de mayor base.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x+2^x+1}{4^x+3^x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3^x}{4^x}+\frac{2^x}{4^x}+\frac{1}{4^x}}{\frac{4^x}{4^x}+\frac{3^x}{4^x}+\frac{5}{4^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x+\left(\frac{2}{4}\right)^x+\frac{1}{4^x}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^x+\frac{5}{4^x}}=\frac{0+0+0}{1+0+0}=0$$

d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{9x^2+10}}$ conduce $\frac{\infty}{\infty}$. Dividamos cada término por la mayor potencia de x.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt{9x^2+10}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{\sqrt{9x^2+10}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{10}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{9+\frac{10}{x^2}}}=\frac{5}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$$

.

e) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ conduce a $\infty-\infty$. Multipliquemos y dividamos por la conjugada.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

f) $\lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)$ conduce a $\infty-\infty$. Saquemos la mayor potencia como factor común.

$$\lim_{x\to+\infty}(3x^4-2x^2)=\lim_{x\to+\infty}x^4\left(3-\frac{2x^2}{x^4}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^4\left(3-\frac{2}{x^2}\right)=+\infty$$

Observación:

En inciso f), el límite de la expresión que quedó entre paréntesis 3, que es el coeficiente x^4 en el polinomio. De ahí que el resultado obtenido es el $\lim_{x\to+\infty}3x^4$. Esto no es una casualidad ni es un resultado exclusivo de este ejercicio, sino que, de manera general, el comportamiento de los polinomios, en el infinito, lo determina el término de mayor potencia.

g) $\lim_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2+7x+2)=\lim_{x\to-\infty}-3x^3=(-3)(-\infty)=+\infty$

2.11.-Regla de Leibniz

Para resolver indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ en funciones racionales fraccionarias se utiliza la regla de Leibniz, la cual establece que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}.$$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+2}{3x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{3x^2}=\frac{4}{3}$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x}{7x^5-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{7x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{7x^2}=0$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+8x-2}{-3x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3}{-3x^2}=\lim_{x\to-\infty}(-\frac{5}{3}x)=+\infty$

De estos ejemplos se deduce que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & \text{si } n<m\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n=m\\ \infty & \text{si } n>m\end{cases}.$$

d) $\lim_{x\to+\infty}[\log(20x+1)-\log(2x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{20x+1}{2x+2}\right)=\log 10=1$

2.12.-Límite fundamental algebraico

El número $e=2{,}718281\cdots$, conocido como la base de los logaritmos naturales, es un número irracional que se define así

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x .$$

Esta fórmula se conoce con el nombre de límite fundamental algebraico.

En lo que sigue trabajaremos con dos funciones que juegan un papel importantísimo en el Análisis Matemático: la función exponencial $y=e^x$ y la logarítmica $y=\log_e x$. Esta última se denomina logaritmo natural o logaritmo neperiano y, para mayor comodidad, se denota por $y=\ln x$. Ambas funciones son mutuamente inversas. Por tanto, se cumple que $e^{\ln x}=\ln e^x=x$. De aquí se deduce que $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$. En general se tiene que

$$a^b=e^{b\ln a} .$$

Si hacemos un análisis del miembro derecho por las reglas establecidas, nos damos cuenta que conduce a una indeterminación de la forma 1^∞. Es ahí donde radica su gran importancia, ya que permite resolver muchos casos de límites donde aparece esta indeterminación.

Para facilitar la aplicación de límite fundamental algebraico hagamos un análisis de las características del mismo que nos permitan hacer una generalización.

1) En la base aparece 1 sumado con la expresión $\alpha(x)=\frac{1}{x}$

2) $\alpha(x)=\frac{1}{x}\to 0$ cuando $x\to\infty$

3) En el exponente aparece $x=\frac{1}{\alpha(x)}$

Si se cumplen estas tres condiciones, independientemente del valor a donde tienda la variable, el límite también es igual a e, o sea, si $\alpha\to 0$ para la forma indicada de pasar el límite, entonces

$$\lim(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e .$$

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-(x-1)}{x-1}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$

$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}\cdot\frac{4}{x-1}(x+3)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4x+12}{x-1}} = e^4$.

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

En general, si $\alpha \to 0$ para la forma indicada de pasar el límite, entonces $\lim\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$.

Ejemplo:

d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln[1+(e^x-1)]} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln[1+(e^x-1)]}{e^x-1}} = \frac{1}{1} = 1$

En general, si $\alpha \to 0$ para la forma indicada de pasar el límite, entonces $\lim\frac{e^\alpha-1}{\alpha} = 1$

Ejemplo:

e) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a = 1\cdot\ln a = \ln a$

En general, si $\alpha \to 0$ para la forma indicada de pasar el límite, entonces $\lim\frac{a^\alpha-1}{\alpha} = \ln a$

2.13.-Continuidad en un punto

Las funciones continuas juegan un papel importantísimo en la Matemática pues ellas cumplen propiedades de gran utilidad en la práctica.

Aquí estudiaremos la continuidad de funciones en aquellos puntos, en torno a los cuales la función está definida (lo que ocurre en casi todos los problemas prácticos). Esto se adapta a nuestra intuición de la continuidad como trazo continuo.

DEFINICIÓN. La función $y = f(x)$ es continua en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esta definición establece que para que una función sea continua en el punto x_0, tiene que cumplir las tres condiciones siguientes:

1) Tiene que estar definida en x_0,

2) Tiene que existir el $\lim_{x \to x_0} f(x)$,

3) Tiene que cumplirse que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

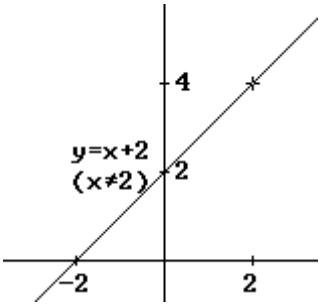
Si por lo menos una de estas tres condiciones no se cumple, entonces la función no es continua en x_0. En ese caso se dice que la función es discontinua en x_0.

Las causas que provocan la discontinuidad de una función en un punto pueden ser muy variadas. Es por eso que, para una mejor comprensión de cada caso, se ha hecho la siguiente clasificación.

$$\text{En } x_0,\ f \text{ puede ser} \begin{cases} \text{Continua : Si } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ \text{Discontinua} \begin{cases} \text{Evitable : Si existe } \lim_{x \to x_0} f(x) \\ \text{Inevitable : Si no existe } \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplos: Analice la continuidad de las funciones siguientes en los puntos indicados.

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2.$$



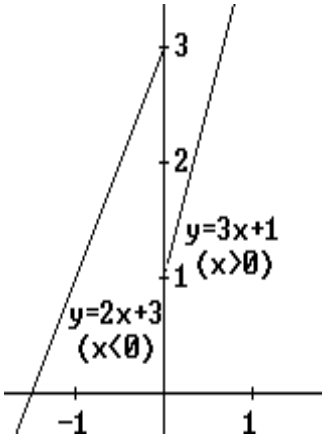
1) $f(2) = 4$

2) $$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

3) $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4$

Conclusión: La función es f continua es $x=2$ porque $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$.

b) $g(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<0 \\ 3 & \text{si } x=0 \\ 3x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ en $x=0$



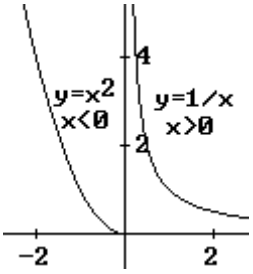
1) $g(0)=3$

2) $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} (2x+3) = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x+1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$.

Luego, no existe $\lim_{x\to 0} g(x)$.

Conclusión: La función g es discontinua inevitable $x=0$ porque no existe el límite.

c) $h(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$ en $x=0$



1) $h(0)=0^2=0$

2) $\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

No existe el límite ordinario porque no existe el límite por la derecha. Fig. 2.14

Conclusión: La función h es discontinua inevitable $x=0$ porque no existe el límite.

d) $\varphi(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<1 \\ -2x+4 & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $x=1$

1) La función no está definida en $x=1$; por tanto, es discontinua en ese punto. Analicemos que ocurre con el límite.

2) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2+1)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x+4)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=2$.

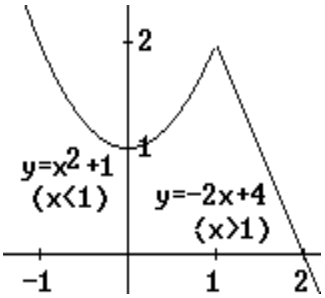


Figura 18. Continuidad en un punto.

Conclusión: La función φ es discontinua evitable en $x=1$ porque existe el límite.

En realidad, la palabra evitable resulta un tanto inadecuada para clasificar la discontinuidad de este tipo, pues la función que es discontinua en un punto, siempre lo será (no se puede evitar). Lo que sucede es que cuando existe el límite en el punto analizado, pero no coincide con el valor de la función en el mismo o la función no está definida en él, se puede obtener otra función, a partir de función dada, que sí es continua en dicho punto. Esta función se denomina prolongación continua de la función dada. La prolongación continua de la funció f se denota por $\hat{f}$ y se define así $\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x) & si\ \ x\neq x_0\\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & si\ \ x=x_0\end{cases}$.

Ejemplo:

La prolongación continua de la función φ dada en el inciso d) es $\hat{\varphi}(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si}\ \ x<1\\ 2 & \text{si}\ \ x=1\\ -2x+4 & \text{si}\ \ x>1\end{cases}$

2.14.-Continuidad de una función en un conjunto

Cuando se desea analizar la continuidad de una función, es necesario saber cómo se comporta la misma en cada uno de los puntos de su dominio; sin embargo, en la mayoría de los casos, el dominio es un intervalo infinito, por lo que dicho análisis no se puede hacer punto a punto. Entonces es necesario extender el concepto de continuidad a conjuntos y establecer las reglas que nos permiten analizar el comportamiento global de la función, o sea, en todo su dominio.

DEFINICIÓN. Una función es continua en un conjunto si lo es en cada uno de los puntos de dicho conjunto. Una función es continua si es continua en todo su dominio.

Como ya hemos visto, para cada una de las funciones elementales básicas se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ en todos los puntos $x_0\in \text{Dom}\, f$. Esto quiere decir que todas las funciones elementales básicas son continuas en cada uno de los puntos donde están definidas, o sea, que son continuas en todo su dominio o, simplemente, son funciones continuas. Esto justifica el procedimiento que se ha utilizado para el cálculo de límites, o sea, evaluar la función en el punto hacia donde tiende la variable.

TEOREMA. Si f y g son funciones continuas, entonces $f \pm g,\ f \cdot g,\ f : g,\ f^{g}$ y $f \circ g$ son continuas en cada uno de los puntos donde dichas operaciones estén definidas.

De acuerdo con estas propiedades, cuando una función viene expresada por una sola fórmula en las que intervienen las operaciones aritméticas, la potencia y la composición de funciones elementales básicas, la determinación del dominio continuidad $(\mathrm{D_c})$ se reduce a la determinación del dominio de definición dichas funciones.

Ejemplos:

a) Las funciones lineales: $y = mx + n$, cuadráticas: $y = ax^2 + bx + c$ y, en general, las racionales enteras: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, están definidas y, por tanto, son continuas en todo R, o sea, $\mathrm{D_c} = \mathrm{R}$.

b) Todas las funciones racionales fraccionarias: $R(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, están definidas y, por tanto, son continuas en cada uno de los puntos donde el denominador es distinto de cero.

c) $y = \log(x-5)$ está definida para $x > 5$. Por tanto, $\mathrm{D_c} = \{x \in \mathrm{R} : x > 5\}$

Cuando la función viene definida por intervalos, el análisis de la continuidad debe hacerse en cada uno de los intervalos de manera global y en cada uno de los puntos donde se dividen los intervalos de manera local.

Ejemplos: Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

La función es continua para $x > 0$, pues en ese intervalo $|x| = x$ que es continua; es continua para $x < 0$, pues en ese intervalo $|x| = -x$ que es continua. Veamos qué ocurre en $x = 0$.

1) $f(0) = |0| = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$; por tanto, $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$.

Conclusión: $f(x) = |x|$ es continua para todos los números reales: $\mathrm{D_c} = \mathrm{R}$.

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si} \quad x\le 5 \\ \sqrt{x+4} & \text{si} \quad x>5 \end{cases}$

La función continua para $x<5$ porque en ese intervalo $f(x)=x^2-3x$ que es una función continua. También es continua para $x>5$ porque en ese caso $f(x)=\sqrt{x+4}$ que es una función continua. Solo falta analizar que ocurre en $x=5$.

1) La función está definida para $x=5$: $f(5)=5^2-3\cdot 5=10$.

2) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(x^2-3x)=10 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\sqrt{x+4}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. No existe $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$; por tanto, la función no es continua en $x=5$.

Conclusión: La función es continua para todo $x\neq 5$, o sea,

Ejercicios:

1.-Calcule los siguientes límites e interprete el resultados.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to 25}\dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ f) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

g) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{2x+5}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+4}$ k) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x^5+x^4}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$ ñ) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$

o) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$ p) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$ q) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

r) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ s) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ t) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^x$

u) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ v) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}$ w) $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$

x) $\lim_{x\to+\infty}[\ln 3x+\ln x-\ln(x^2+5)]$ y) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x}$ z) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{x}$

2.-Calcule el $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ **para las funciones:**

a) $f(x)=c$ b) $f(x)=x$ c) $f(x)=mx+n$ d) $f(x)=x^2$

e) $f(x)=\frac{1}{x}$ f) $f(x)=\sqrt{x}$ g) $f(x)=\log_a x$ h) $f(x)=a^x$

3.-Analice el comportamiento de las funciones siguientes en los puntos indicados e interprete el resultado geométricamente.

a) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-36}{x-6} & \text{si } x\neq 6\\ 12 & \text{si } x=6\end{cases}$ en $x=6$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x\leq 3\\ 2x+1 & \text{si } x>3\end{cases}$ en $x=3$

c) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x<2\\ \sqrt{x+7} & \text{si } x\geq 2\end{cases}$ en $x=2$

d) $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x+10} & \text{si } x>0\\ 3x+5 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$ en $x=0$

e) $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{1/x} & \text{si } x>0\\ (x^2+3)^{1/x} & \text{si } x<0\end{cases}$ en $x=0$

f) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & \text{si } x\leq 2\\ \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{si } x>2\end{cases}$ en $x=2$

g) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4} & \text{si } x<2\\ e^3 & \text{si } x=2\\ (4x-7)^{\frac{1}{x-2}} & \text{si } x>2\end{cases}$ en $x=2$

h) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt{x^2+15}-8}{x-7} & \text{si } x>7\\ \frac{x^2-49}{x^2-16x+63} & \text{si } x<7\end{cases}$ en $x=7$

4.-Determine el dominio de continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

c) $f(x)=\begin{cases} 4-x & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x=1 \\ x^2+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{si } x\neq \pm 2 \\ 1 & \text{si } x=\pm 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$

d) $f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\leq 2 \\ 3x+1 & \text{si } x>2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} 4 & \text{si } x\leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 2x-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

5.-Determine para que valores de a y b las siguientes funciones son continuas.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si } x\neq a \\ 18 & \text{si } x=a \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si } x\neq a \\ a^2 & \text{si } x=a \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2a & \text{si } x\leq 10 \\ ax+50 & \text{si } x>10 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} b^2+3bx-10x^2 & \text{si } x\neq 1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{si } x<2 \\ 6 & \text{si } x=2 \\ 4ax+3bx & \text{si } x>2 \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & \text{si } x<1 \\ 9 & \text{si } x=1 \\ 2ax+3bx-13 & \text{si } x>1 \end{cases}$

6.-Construya la prolongación continua de las siguientes funciones

a) $f(x)=\dfrac{x^2-100}{x^3-10x^2+x-10}$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+11}-6}{x-5}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|+5}-3}{x-4}$

d) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{x-64}$

CAPÍTULO 3. DERIVACIÓN

Cuando estudiamos las funciones, vimos una interpretación importante de la pendiente de las funciones lineales como tasa de variación de la función con respecto a la variable independiente. Por ejemplo, en la función de costo $C = 3q + 30$, el hecho de que $m = 3$ (coeficiente de q en la ecuación lineal) significa que cualquiera que sea el nivel de producción, el costo aumenta a razón de $3 por unidad de producto fabricada, o sea, que el costo marginal es de $3 / unidad de producto.

Ahora bien, si la función de costo no es lineal, por ejemplo $C = 0{,}3q^2 + 2q + 850$, ¿el costo marginal será el mismo para cualquier nivel de producción?; ¿cómo se calcula el costo marginal en este caso?

A la primera pregunta podemos responder que el costo marginal es el mismo para cualquier nivel de producción únicamente cuando la función de costo es lineal. Cuando la función es cuadrática o de otro tipo, el costo marginal es otra función que varía en dependencia del nivel de producción que se alcance.

A la segunda interrogante solo podemos adelantar que, para calcular el costo marginal en estos casos, es necesario hallar la derivada de la función de costo total.

Este ejemplo nos muestra la importancia que tiene el concepto de derivada para los economistas y contadores, pues su uso es necesario en el análisis económico. Por estas razones, al concluir este tema los estudiantes deben ser capaces de:

Calcular la derivada y el diferencial de una función e interpretar el resultado tanto geométrica como económicamente.

Para cumplir con este objetivo:

1.-El estudiante debe saber:

a qué se llama derivada de una función en un punto y función derivada,

cuál es el significado geométrico de la derivada en un punto,

cuál es el significado económico de la derivada en un punto y de la función derivada,

cuál es la condición necesaria para la derivabilidad en punto y su significado,

cuáles son las derivadas de las funciones elementales básicas,

cuáles son y cómo se aplican las reglas de derivación de las operaciones con funciones,

cómo se procede para aplicar el método de derivación logarítmica,

cómo se calculan las derivadas de orden superior,

a qué se llama diferencial de una función y como se calcula,

cómo se aplica el diferencial para hallar un valor aproximado de la variación de una función,

a qué se llama elasticidad de una función.

2.-El estudiante debe desarrollar habilidades para:

Calcular derivadas de cualquier orden aplicando las reglas de derivación y el método de derivación logarítmica.

Determinar la ecuación de la tangente a una curva en uno de sus puntos.

Resolver problemas de aplicación del diferencial al cálculo aproximado de la variación de una función.

Calcular la elasticidad de una función en un punto e interpretar el resultado.

Calcular las funciones marginales y medias de las funciones totales que se presentan en la economía como el costo, ingreso, utilidad, consumo, etc.

3.1.-Derivada de una función en un punto

Sea $y = f(x)$ una función continua en] a, b [y $x_0 \in]a,b[$. Demos a x_0 una variación Δx de modo que $x_0 + \Delta x \in]a,b[$. Entonces la función experimenta una variación

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (Fig. 3.1).

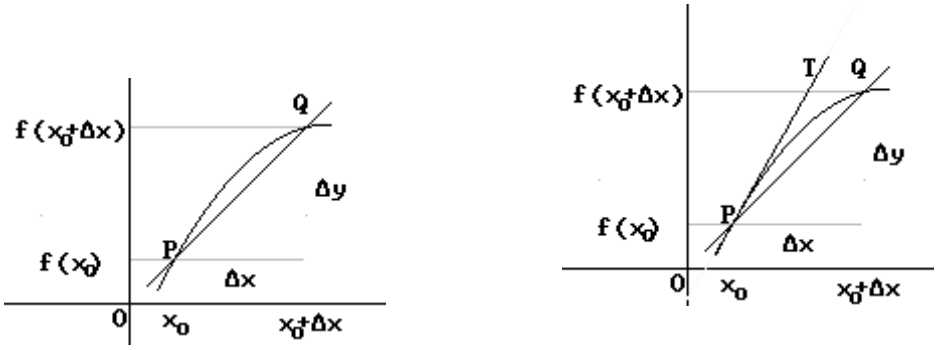


Figura 19. Derivada de una función en un punto.

Se denomina cociente incremental a la razón entre la variación de y, y la variación de x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

.

Observaciones:

El cociente incremental representa:

1.-Geométricamente, la pendiente de la secante a la curva $y = f(x)$ que pasa por los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (Fig. 3.1),

2.-Analíticamente, la tasa media de variación de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

Cuando $\Delta x \to 0$, el punto Q se mueve sobre la curva en dirección a P. Si existe la posición límite de la recta PQ cuando $\Delta x \to 0$, ésta es la tangente a la curva en el punto $(x_0; f(x_0))$ (Fig. 3.2). En ese caso existe el

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad . \qquad (1)$$

Observaciones:

El límite (1) representa:

3.-Geométricamente, la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P $(x_0, f(x_0))$ (Fig. 3.2).

4.-Analíticamente, la tasa de variación de la función $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$.

DEFINICIÓN. La función $y = f(x)$ es derivable en x_0 si existe el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Dicho límite se denomina derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$, o sea,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad .$$

De acuerdo con las observaciones 3 y 4, la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 representa, geométricamente, la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y, analíticamente, la tasa de variación de la función en el punto $x = x_0$. Más adelante retomaremos estas interpretaciones para resolver problemas geométricos y económicos. Por el momento vamos a analizar bajo qué condiciones existe la derivada y luego veremos cómo se calcula.

3.2.-Condiciones para la existencia de la derivada en un punto

Si f (x) es derivable en x_0, entonces $f'(x_0)$ existe de manera única porque el límite que la define lo es. La existencia de dicho límite depende de la existencia de los límites laterales. Estos límites laterales se denominan derivadas laterales de la función f en el punto x_0 y se denotan por $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$:

$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de f en x_0 por la izquierda,

$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ es la derivada de f en x_0 por la derecha.

TEOREMA. Una función es derivable en el punto x_0 si y solo si existen y son iguales las derivadas por la izquierda y por la derecha de x_0.

Este teorema nos indica que la existencia e igualdad de las derivadas laterales es una condición necesaria y suficiente para la derivabilidad.

Ejemplo: Analizar si la función $y = |x|$ es derivable en $x = 0$.

$$f_+'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} 1 = 1 \quad .$$

$$f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} -1 = -1.$$

La función $y = |x|$ es derivable por la izquierda y por la derecha, pero las derivadas laterales son distintas, por tanto, dicha función no es derivable en $x = 0$.

Entre la derivabilidad y la continuidad existe una relación importante que se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA. Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto.

Observaciones:

1.-Este teorema establece que la continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad, o sea, si una función no es continua en un punto, entonces no es derivable en él.

Ejemplo: La función $y = \frac{1}{x}$ no es derivable en $x = 0$ porque no es continua en ese punto.

2.-La continuidad no es una condición suficiente para la derivabilidad, pues hay funciones que son continuas en puntos donde no son derivables.

Ejemplo: La función $y = |x|$ es continua en $x = 0$, sin embargo no es derivable en ese punto (como se demostró en el ejemplo anterior).

3.3.-Derivada de las funciones elementales básicas

Como la derivada de una función en punto es única, si a cada punto $x \in \text{Dom } f$ donde f es derivable se le hace corresponder la derivada de la función en ese punto, entonces se obtiene una nueva función. Esta función se denomina función derivada o, sencillamente, derivada de la función f.

DEFINICIÓN. Se llama derivada de $y = f(x)$ a la función $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Notaciones:

a) y' (Se lee: "y prima")

b) $f'(x)$ (Se lee: "f prima en x")

c) $\dfrac{dy}{dx}$ (Se lee: "derivada de y con respecto a x")

Aplicando la definición anterior se pueden obtener las reglas de derivación de las funciones elementales básicas. Veamos cómo se logra esto.

1.-Sea $f(x) = c$ (c constante).

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

REGLA 1: La derivada de una constante es cero.

Ejemplos:

a) $(4)' = 0$ b) $(\pi)' = 0$ c) $(e)' = 0$

2.-Sea $f(x) = x$.

$$\frac{dx}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

REGLA 2: La derivada de la variable de derivación es uno.

Ejemplos:

a) $\dfrac{dt}{dt} = 1$ b) $\dfrac{dy}{dy} = 1$ c) $\dfrac{dz}{dz} = 1$

3.-Sea $f(x)=\log_a x \quad (0<a\neq 1).$

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\log_a e^{1/x}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

REGLA 3: La derivada de la función logarítmica es el cociente de uno sobre, el argumento por el logaritmo natural de la base.

Ejemplos:

a) $(\log_5 x)'=\frac{1}{x\ln 5}$ b) $(\log x)'=\frac{1}{x\ln 10}$ c) $(\ln x)'=\frac{1}{x\ln e}=\frac{1}{x}$

4.-Sea $f(x)=a^x \quad (0<a\neq 1).$ Entonces:

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x a^{\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

REGLA 4: La derivada de la función exponencial es el producto de la propia función exponencial por el logaritmo natural de la base.

Ejemplos:

a) $(4^x)'=4^x\ln 4$ b) $(2^x)'=2^x\ln 2$ c) $(e^x)'=e^x\ln e=e^x$

5.-Sea $f(x)=x^n \quad (n\in N).$ Entonces:

$$(x^n)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x - x)\left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + \cdots + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)$$

$$= x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{n \text{ veces}} = n x^{n-1}$$

.

REGLA 5: La derivada de una potencia es el producto del exponente por, la misma base con el exponente disminuido en uno.

Ejemplos:

a) $(x^5)' = 5x^4$ b) $(x^4)' = 4x^3$ c) $(x^3)' = 3x^2$ d) $(x^2)' = 2x$

3.4.-Reglas aritméticas de derivación

REGLA 6: La derivada de una suma es la suma de las derivadas de cada uno de sus términos.

$$(f + g - h)'(x) = f'(x) + g'(x) - h'(x)$$

Ejemplos:

a) $(x^7 + e^x - \ln x)' = (x^7)' + (e^x)' - (\ln x)' = 7x^6 + e^x - \frac{1}{x}$

b) $(x^2 + x + 5)' = (x^2)' + (x)' + (5)' = 2x + 1$

c) $(2^x - \log x + x^3 - 1)' = 2^x \ln 2 - \frac{1}{x \ln 10} + 3x^2$

REGLA 7: La derivada del producto de una constante por una función es el producto de la propia constante por la derivada de la función.

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Ejemplos:

a) $(9\cdot 5^x)' = 9\cdot(5^x)' = 9\cdot 5^x \ln 5$

b) $(\ln x^3)' = (3\ln x)' = 3(\ln x)' = 3\cdot\frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

c) $(3x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 7x)' = 3(x^4)' - 4(x^3)' + 9(x^2)' - 7(x)' = 12x^3 - 12x^2 + 18x - 7$

REGLA 8: La derivada de un producto es la suma del producto de la derivada del primer factor por todos los demás factores, más la derivada del segundo factor por todos los demás factores y así sucesivamente hasta llegar al producto de la derivada del último factor por todos los demás factores.

$$(f\cdot g\cdot h)'(x) = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$$

Ejemplos:

a) $(x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$

b) $(x^4 5^x \ln x)' = (x^4)' 5^x \ln x + x^4 (5^x)' \ln x + x^4 5^x (\ln x)' = 4x^3 5^x \ln x + x^4 5^x \ln 5 \ln x + x^4 5^x (1/x)$

REGLA 9: La derivada de un cociente es otro cociente cuyo numerador es la diferencia del producto de la derivada del numerador por el denominador, menos el numerador por la derivada del denominador y cuyo denominador es el cuadrado del denominador del cociente original.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[f(x)]^2}$$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{(\ln x)' x^3 - \ln x (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{\frac{1}{x} x^3 - \ln x (3x^2)}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4}$

b) $\left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{(x^2)' e^x - x^2 (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$

3.5.-Derivada de la función inversa

REGLA 10: Si la función $y = f(x)$ **tiene inversa, entonces** $x = f^{-1}(y)$ **es derivable en todos los puntos donde** $f'(x) \neq 0$ **y se cumple que**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Ejemplos:

a) Sea $y = \sqrt[n]{x}$. Entonces $x = y^n$. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

b) $$(4\sqrt{x}+15\sqrt[3]{x})' = 4(\sqrt{x})'+15(\sqrt[3]{x})' = 4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)+15\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$$

3.6.-Derivadas de funciones compuestas

REGLA DE LA CADENA 11: La derivada de una función compuesta es el producto de la derivada de la función principal, por la derivada del argumento

$$[f(g(x)]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

La regla de la cadena generaliza todas las reglas de derivación de las funciones elementales básicas. La generalización de dichas reglas es la siguiente:

1) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

2) $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$. En particular, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 3) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$. En particular, $(e^u)' = e^u \cdot u'$

4) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$. En particular, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

El cálculo de derivadas, cuando las funciones aparecen en forma básica, se hace casi en forma mecánica; sin embargo, cuando las funciones aparecen en forma compuesta es necesario realizar los cuatro pasos lógicos que mostraremos a continuación.

Ejemplo: Calcular la derivada de $f(x) = (2x^2 + 3)^4$ **.**

1.-Identifique la expresión que se va a derivar. Esto se hace en la función por simple inspección.

En este caso se va a derivar una potencia.

2.-Seleccione la regla que va utilizar. Para esto analice cuál de las reglas tiene, en el miembro izquierdo, la misma forma que la expresión a derivar.

En este caso la regla 1)

3.-Seleccione los parámetros que exige la regla. Esto se hace en la función, comparándola con el miembro izquierdo de la regla seleccionada.

El miembro izquierdo de 1) tiene los parámetros u y n. En la función $u = 2x^2 + 3, \;\; n = 4$.

4.-Aplique la regla seleccionada. Esto se hace sustituyendo los parámetros seleccionados en el miembro derecho de la regla.

$$f'(x) = 4(2x^2 + 3)^3 \cdot (2x^2 + 3)' = 4(2x^2 + 3)^3 \cdot 4x = 16x(2x^2 + 3)^3$$

Observación:

1.-Estos pasos lógicos, como su nombre lo indica, no se escriben, sino transcurren en la mente de cada uno. Solo se escribe la aplicación de la regla. Es bueno aclarar también que la derivada obtenida debe simplificarse hasta la mínima expresión.

Ejemplos:

a) $(\sqrt{e^x + 5}\,)' = \dfrac{(e^x + 5)'}{2\sqrt{e^x + 5}} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x + 5}}$

b) $(2^{x^4 + 8x})' = 2^{x^4 + 8x} \ln 2 \cdot (x^4 + 8x)' = (4x^3 + 8)\, 2^{x^4 + 8x} \ln 2$

c) $(e^{3\ln x + 9})' = e^{3\ln x + 9}(3\ln x + 9)' = e^{3\ln x + 9} 3 \cdot \frac{1}{x} = \dfrac{3\, e^{3\ln x + 9}}{x}$

d) $(\ln(x^2 + x)^3)' = \dfrac{((x^2 + x)^3)'}{(x^2 + x)^3} = \dfrac{3(x^2 + x)^2 (x^2 + x)'}{(x^2 + x)^3} = \dfrac{3(x^2 + x)^2 (2x + 1)}{(x^2 + x)^3} = \dfrac{6x + 3}{x^2 + x}$

3.7.-Derivadas de orden superior

Si la función $y = f(x)$ es derivable, entonces $y' = f'(x)$ es la primera derivada de f. Si $y' = f'(x)$ es derivable, entonces $y'' = (f'(x))' = f''(x)$ es la segunda derivada de f. Si $y'' = f''(x)$ es derivable, entonces $y''' = (f''(x))' = f'''(x)$ es la tercera derivada de f. Si $y''' = f'''(x)$ es derivable, entonces $y^{(4)} = (f'''(x))' = f^{(4)}(x)$ es la cuarta derivada de f, y así sucesivamente.

y'' se lee "y segunda"; y''' se lee "y tercera"; $y^{(4)}$ se lee "y cuarta"; ...

$f''(x)$ se lee "f segunda en x"; $f'''(x)$ se lee "f tercera en x"; $f^{(4)}(x)$ se lee "f cuarta en x"; ...

$\frac{d^2y}{dx^2}$ se lee "segunda derivada de y con respecto a x"; $\frac{d^3y}{dx^3}$ se lee "tercera derivada de y con respecto a x"; ...

Ejemplo:

a) Calcule todas las derivadas de la función $f(x) = e^x + x^3$

$f'(x) = (e^x + x^3)' = e^x + 3x^2$

$f''(x) = (e^x + 3x^2)' = e^x + 6x$

$f'''(x) = (e^x + 6x)' = e^x + 6$

$f^{(4)}(x) = (e^x + 6)' = e^x$

$\vdots$ $f^{(n)}(x) = e^x$ para todo $n \geq 4$.

3.8.-Ecuación de la tangente y la normal

Como ya vimos, $f'(x_0)$ representa la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0), o sea, $m_t = f'(x_0)$; por tanto, la ecuación de dicha tangente es

$y - y_0 = f'(x_0)\,(x - x_0)$.

DEFINICIÓN. Se denomina normal a una curva en un punto, a la recta que pasa por dicho punto y es perpendicular a la tangente a la curva en ese punto.

Como se sabe, la pendiente de una recta es igual al valor opuesto del recíproco de la pendiente de cualquier perpendicular a ella. Por tanto, la pendiente de la normal m_n es el opuesto del recíproco de la pendiente de la tangente, o sea,

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Por tanto, la ecuación de la normal a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ejemplos:

1.-Dada función $y = x^2$ y el punto (1; 1):

a) Halle la ecuación de la tangente.

b) Halle la ecuación de la normal.

c) Grafique la función, la pendiente y la normal.

Respuesta:

a) $x_0 = 1;\ y_0 = 1$

$f'(x) = 2x$.

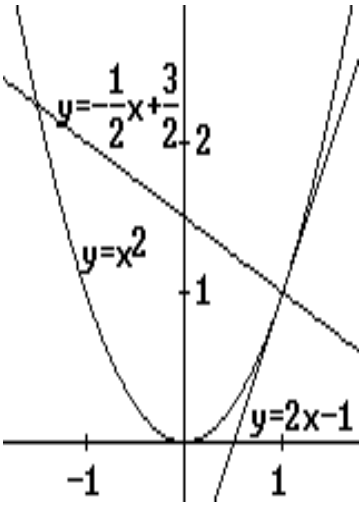


Figura 20. Ecuación de la tangente y la normal.

$m_t = f'(1) = 2$ es la pendiente de la tangente.

La ecuación de la tangente es $y - 1 = 2\,(x - 1)$, o sea, $y = 2\,x - 1$.

b) $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2}$ es la pendiente de la normal. Por tanto, la ecuación de la normal es

$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, o sea, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

c) En la figura 3.4 aparece el gráfico de la función, de la tangente y de la normal.

2.-Halle la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto en el punto donde $x = 0$.

Respuesta:

$x_0 = 0;\ \ y_0 = \sqrt{0} = 0$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Para $x = 0,\ \ y' = \infty$; por tanto, la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en (0; 0) es vertical, o sea, es la recta $x = 0$ (eje y).

3.-Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (2; 3) y es paralela a la tangente a la curva $y = x^2 - x$ en el punto donde $x = 5$.

Respuesta:

$y' = 2x - 1$.

$m_t = f'(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ es la pendiente de la tangente a la curva en el punto donde $x = 5$.

La recta que nos piden es paralela a la tangente, por tanto, tienen la misma pendiente, o sea, la pendiente de dicha recta es $m = 9$. Como, además, pasa por el punto (2; 3), entonces su ecuación es $y - 3 = 9\ (x - 2)$, es decir, $y = 9x - 15$.

4.-Determine en qué punto de la curva $y = 3x^2 - 11x$, la tangente es paralela al gráfico de la función idéntica.

Respuesta:

El gráfico de la función idéntica es la recta $y = x$, que tiene pendiente $m = 1$. Por tanto, aquí es necesario hallar los puntos donde la derivada es uno, o sea, los que satisfacen la ecuación

$f'(x) = 1$.

$6x - 11 = 1$

$x = 2$

$f(2) = 3 \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 = -10$; Por tanto, el punto de la curva $y = 3x^2 - 11x$ en el cual la tangente es paralela al gráfico de la función idéntica es (2; –10).

3.9.-Interpretación económica de la derivada

En la introducción este tema, vimos que la derivada de la función $y = f(x)$ en un punto x_0 representa, analíticamente, la tasa de variación la función en ese punto. Ahora bien, en Economía, a la tasa de variación de algunas funciones totales se le denomina función marginal. Por tanto, las funciones

marginales se obtienen derivando las funciones totales. En la siguiente tabla exponemos la relación entre las funciones totales más usadas en la economía y sus derivadas.

Funciones totales	La derivada se denomina	La derivada representa
Producción: $q=f(x)$	Rendimiento marginal: $q_m = \frac{dq}{d\,x}$	La variación aproximada del nivel de producción total q al utilizar una unidad adicional del factor de producción x.
Costo: $C=f(q)$	Costo marginal: $C_m = \frac{dC}{dq}$	La variación aproximada del costo total de producción cuando se fabrica una unidad de producto adicional.
Ingreso: $I=f(q)$	Ingreso marginal: $I_m = \frac{dI}{dq}$	La variación aproximada del ingreso total si se vende una unidad de producto adicional.
Utilidad: $U=f(q)$	Utilidad marginal: $U_m = \frac{dU}{dq}$	La variación aproximada de la utilidad debido a la producción y venta de una unidad de producto adicional.
Consumo: $C=f(I)$	Propensión marginal al consumo: $C_m = \frac{dC}{dI}$	La variación aproximada del consumo por cada peso que aumente el ingreso.
Ahorro: $S=f(I)$	Propensión marginal al ahorro: $S_m = \frac{dS}{dI}$	La variación aproximada del ahorro por cada peso que aumente el ingreso.
Oferta: $q=f(p)$	Tasa de variación de la oferta: $q_m = \frac{dq}{dp}$	La variación aproximada de la oferta por cada peso que aumente el precio.
Demanda: $q=f(p)$	Tasa de variación de la demanda: $q_m = \frac{dq}{dp}$	La variación aproximada de la demanda por cada peso que aumente el precio.

En lo que sigue utilizaremos las expresiones: “tasa de variación” y “razón de cambio”, como sinónimos de derivada.

Ejemplos:

1.-Sea $p=100-q^2$ el precio unitario de un producto en función de la demanda q.

a) Hallar la tasa de variación del precio respecto a la demanda.

b) ¿Cuál es la razón de cambio del precio cuando la demanda es de 5 unidades de producto?

c) Interprete económicamente el resultado del inciso b).

Respuesta:

a) La tasa de variación de p con respecto a q es $P' = (100 - q^2)' = -2q$.

b) $p'(5) = -2(5) = -10$. La razón de cambio del precio cuando la demanda es de 5 unidades de producto es –10 $/unidad de producto.

c) Esto significa que cuando la demanda es de 5 unidades de producto, el precio disminuye a razón de $10.00 por unidad, o sea, un aumento de la demanda en una unidad de producto provoca una disminución aproximada de $10.00 en el precio que los consumidores están dispuestos a pagar por cada unidad de producto.

2.-Un sociólogo está estudiando varios programas que pueden ayudar en la educación de los niños en edad preescolar. El sociólogo considera que después de x años de iniciado un programa específico, $f(x)$ millares de preescolares se inscribirán en el mismo. Si se sabe que $f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2)$ con $0 \le x \le 12$:

a) ¿Cuál será la tasa de variación de la inscripción al cabo de x años?

b) Halle la tasa de variación de la inscripción al cabo de 3 años de iniciado el programa.

c) Halle la tasa de variación de la inscripción al cabo de 9 años de iniciado el programa.

Respuesta:

a) La tasa de variación de la inscripción es $f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x)$.

b) $f'(3) = \frac{10}{9}(12 - 2 \cdot 3) = \frac{10}{9}(6) = \frac{20}{3}$ millares/año

Esto quiere decir que, al cabo de 3 años, la inscripción al programa aumentará a una razón de $\frac{20}{3}$ millares de preescolares por año.

c) $f'(9) = \frac{10}{9}(12 - 2 \cdot 9) = \frac{10}{9}(-6) = -\frac{20}{3}$ millares/año

Esto significa que, al cabo de 9 años de iniciado el programa, la inscripción disminuirá a una razón de $\frac{20}{3}$ millares de preescolares por año.

3.-El costo total de fabricación de q libras de un producto es $C = 0{,}1q^2 + 3$. Determine el costo marginal al producirse 4 libras e interprete el resultado económicamente.

Respuesta:

a) El costo marginal es $\frac{dC}{dq} = \frac{d}{dq}(0{,}1q^2 + 3) = 0{,}2q$

b) $\left.\frac{dC}{dq}\right|_{q=4} = 0{,}2q\big|_{q=4} = 0{,}2(4) = 0{,}8$ \$/unidad

c) Esto significa que cuando el nivel de producción es de 4 libras, el costo aumenta a razón de \$0,80 por libra, es decir, que producir una libra adicional cuesta más o menos \$0,80.

4.-Se desean vender q unidades de un producto cuyo precio unitario, en función de la demanda, es $p = 90 - 3q$. Halle el ingreso marginal cuando la demanda es de 5 unidades de producto.

Respuesta:

a) La función de ingreso total es $I = pq = (90 - 3q)q = 90q - 3q^2$

b) El ingreso marginal es $\frac{dI}{dq} = \frac{d}{dq}(90q - 3q^2) = 90 - 6q$

c) $\left.\frac{dI}{dq}\right|_{q=5} = (90 - 6q)\big|_{q=5} = 90 - 6 \cdot 5 = 60$

d) Esto significa que cuando la demanda es de 5 unidades de producto, el ingreso aumenta a razón de \$60,00 por unidad, es decir, si se vende una unidad adicional se ingresarán alrededor de \$60,00 más.

3.10.-Elasticidad de una función

La elasticidad de una función es un coeficiente que permite analizar la forma en que un cambio en la variable independiente x afecta a la función $y = f(x)$, pero desde el punto de vista porcentual.

Sea $y = f(x)$ una función derivable en $]a,b[$ y $x \in]a,b[$. Demos a x una variación Δx tal que $x + \Delta x \in]a,b[$. Entonces la función sufre una variación $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Ahora bien, el porciento de variación de la x es

$\frac{\Delta x}{x} \cdot 100$;

mientras que el porciento de variación de la función es

$\frac{\Delta y}{y}\cdot 100$.

El cociente de estas variaciones porcentuales es

$$\frac{\frac{\Delta y}{y}\cdot 100}{\frac{\Delta x}{x}\cdot 100}=\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=\frac{\Delta y}{y}\cdot\frac{x}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}.$$

Como la función es derivable, se cumple que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{x}{y}\right)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y} \qquad (1)$$

DEFINICIÓN. El límite (1) se denomina elasticidad de la función $y=f(x)$ y se denota por la letra griega η (eta), o sea, $\eta=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}$.

Observaciones:

1.-La elasticidad de una función en un punto representa el porciento de variación de la función cuando la variable independiente aumenta en un 1%.

2.-Desde el punto de vista dimensional, la elasticidad da $\eta\ \frac{\text{Unidades de } y}{\text{Unidades de } x}\cdot\frac{\text{Unidades de } x}{\text{Unidades de } y}=\eta$, o sea, η es un número real (sin unidades de medida).

3.-Existen tres categorías de elasticidad:

a) Se dice que la función es elástica cuando que el porciento de variación de la función es mayor que el porciento de variación de la variable independiente, o sea, cuando $|\eta|>1$.

b) Se dice que la función tiene elasticidad unitaria cuando el porciento de variación de la función es el mismo que el de la variable independiente, o sea, cuando $|\eta|=1$.

c) Se dice que la función es inelástica cuando el porciento de variación de la función es menor que el porciento de variación de la variable independiente, o sea, cuando $|\eta|<1$.

La elasticidad es un indicador que, matemáticamente, se puede calcular para cualquier función derivable; sin embargo, en Economía solo se estudia la elasticidad de la demanda y, con menos interés, la elasticidad de la oferta.

Ejemplos:

1.-Dada la función de la demanda $q = p^2 - 40p + 400$ donde p es el precio unitario. Halle la elasticidad de la demanda cuando el precio es de $15.

Respuesta:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = (2p - 40)\frac{p}{q} = \frac{2p(p-20)}{p^2 - 40p + 400} = \frac{2p(p-20)}{(p-20)^2} = \frac{2p}{p-20}.$$

Para $p = 15$, $\eta = \frac{2 \cdot 15}{15 - 20} = -6$.

Esto quiere decir que cuando el precio es de $15, si éste aumenta en un 1%, la demanda disminuye aproximadamente en un 6%. Como se puede ver, el porciento de variación de la demanda es mayor que el porciento de variación del precio; por tanto, la demanda es elástica para p = $15.

2.-Determine la elasticidad de la función de demanda $q = \frac{5}{p}$.

Respuesta:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = -\frac{5}{p^2} \cdot \frac{p}{\frac{5}{p}} = -\frac{5}{p^2} \cdot \frac{p^2}{5} = -1.$$

La elasticidad es constante e igual a –1; por tanto, la demanda tiene elasticidad unitaria para todo $p > 0$, o sea, cualquiera que sea el precio unitario, si éste aumenta en un 1%, la demanda disminuye aproximadamente en un 1%. Como se puede ver, los porcientos de variación del precio y la demanda son equivalentes

3.-Dada la función de oferta $q = 2p$, determine la elasticidad de la oferta.

Respuesta:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = 2 \cdot \frac{p}{2p} = 1$$

La elasticidad es constante e igual a 1; por tanto, la oferta tiene elasticidad unitaria para todo $p > 0$, o sea, cualquiera que sea el precio unitario, si éste aumenta en un 1%, la oferta aumenta en un 1% también.

4.-Dada la función de oferta $q = 4p + 5$. Halle la elasticidad de la oferta.

Respuesta:

$$\eta = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q} = 4 \cdot \frac{p}{4p+5} = \frac{4p}{4p+5} < 1$$ para todo $p > 0$.

Por tanto, la oferta es inelástica, esto quiere decir que cualquiera que sea $p > 0$, el porciento de variación de la oferta es menor que el porciento de variación del precio.

3.11.-Diferencial de una función y sus aplicaciones

Uno de los conceptos asociados a la derivada es el de diferencial. El mismo permite, de manera sencilla, hacer un análisis de la variación aproximada que experimenta una función para una variación pequeña del argumento.

Sea que $y = f(x)$ es una función derivable, o sea, que existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Entonces el cociente incremental se puede escribir en la forma

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Por tanto, la variación de la función se puede expresar así

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \quad (1)$$

El primer sumando del miembro derecho de la expresión (1) se llama diferencial de la función $y = f(x)$ y se denota por dy, o sea,

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Ejemplos:

a) $dc = c'\Delta x = 0\Delta x = 0$, o sea: "El diferencial de una constante es cero".

b) $dx = x'\Delta x = 1\Delta x = \Delta x$, o sea:

"El diferencial de la variable independiente coincide con su propia variación". Por tanto, el diferencial de la función se puede expresar como sigue:

$$dy = f'(x)dx \quad (2)$$

Esto quiere decir que: “El diferencial de la función es el producto de la derivada de la función por el diferencial de la variable independiente”. Por consiguiente, el cálculo del diferencial se reduce al cálculo de la derivada, pues dx no hay que calcularlo.

Ejemplos:

Sea $y = x^5$. Entonces $dy = (x^5)'dx = 5x^4\,dx$.

Sea $y = e^x$. Entonces $dy = (e^x)'dx = e^x\,dx$.

Sea $y = \ln x$. Entonces $dy = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$

Sustituyendo (2) en (1) se obtiene que $\Delta y = dy + \alpha\,\Delta x$ donde $\alpha \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Esto quiere decir que la variación de la función Δy es la suma de su diferencial dy, más un término $\alpha\,\Delta x$ que tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$ (Fig. 3.5). Por tanto, si se toma Δx lo suficientemente pequeño se puede despreciar el valor de $\alpha\,\Delta x$. Entonces resulta que

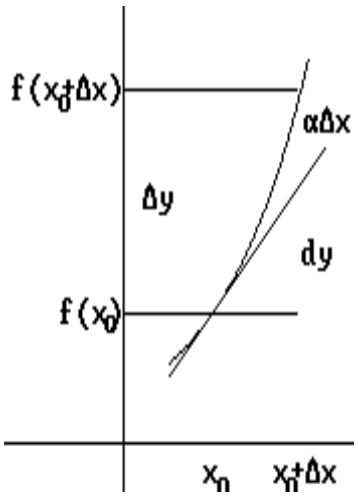


Figura 21. Diferencial de una función y sus aplicaciones.

$\Delta y \approx dy$. (3)

Por otro lado, la figura 3.4 muestra que el diferencial, geométricamente, representa la variación de ordenada de la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$.

La expresión (3) nos permite hacer una estimación de la variación de la función a través del diferencial. La interpretación del resultado es similar al de la derivada, pero teniendo en cuenta que aquí la variación de x no necesariamente tiene que ser igual a 1.

Ejercicios:

1.-Dada la función $f(x) = x^2 + x$; $x_0 = 1$ **y** $\Delta x = 0{,}2$

Calcule Δy.

Calcule dy.

Haga un análisis del error que se comete si tomamos $\Delta y \approx dy$.

Respuesta

a) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1+0{,}2) - f(1) = f(1{,}2) - f(1) = (1{,}2^2 + 1{,}2) - (1^2 + 1)$

$= 1{,}44 + 1{,}2 - 2 = 0{,}64$.

Esto quiere decir que la función aumenta exactamente en 0,64 unidades.

b) $dy = (x^2 + x)' \cdot dx = (2x+1) \cdot dx$. Para $x = 1$ y $dx = 0{,}2$ se tiene que

$dy = (2 \cdot 1 + 1) \cdot 0{,}2 = 0{,}6$

Esto quiere decir que la función aumenta aproximadamente en 0,6 unidades.

c) El error absoluto ε es la diferencia entre el valor aproximado y el valor correcto, o sea, $\varepsilon = dy - \Delta y = 0{,}6 - 0{,}64 = -0{,}04$. Esto quiere decir que al estimar Δy a través de dy se comete un error de 0,04 unidades por defecto.

2.- ¿Cuál es la variación aproximada de la función $y = \sqrt{x}$ si a partir de 4 la x aumenta en 0,1?

Planteamiento

$y = \sqrt{x}$ (Función a analizar)

$x_0 = 4$ (Valor inicial de x)

$\Delta x = 0{,}1$ (Variación de x)

$\Delta y \approx ?$ (Objetivo del problema)

Resolución

$$\Delta y \approx dy = (\sqrt{x})' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

Para $x = 4$ y $\Delta x = 0{,}1$

$$\Delta y \approx \frac{1}{2\sqrt{4}}(0{,}1) = \frac{0{,}1}{2 \cdot 2} = 0{,}025$$

Conclusión: Si a partir de 4, la x aumenta en 0,1, entonces la función aumenta aproximadamente en 0,025 unidades.

3.-El costo total de la fabricación de q docenas de pares de medias viene dado por la función $c = -10484{,}69 + 6{,}7q - 0{,}000328q^2$. Inicialmente se producían 5000 docenas de pares. ¿Cuál es la variación aproximada del costo si la producción disminuye en media docena?

Planteamiento

q: docenas de pares de media a fabricar.

$c = -10484{,}69 + 6{,}7q - 0{,}000328q^2$ (Costo total de fabricación)

$q_0 = 5000$ (Producción inicial)

$\Delta q = -0{,}5$ (Variación de la producción)

$\Delta c \approx ?$ (Objetivo del problema)

Resolución

$$\Delta c \approx dc = (-1048{,}69 + 6{,}7q - 0{,}000328q^2)' \cdot dq = (6{,}7 + 0{,}000656q) \cdot dq$$

Para $q = 5000$ y $\Delta q = -0{,}5$ se tiene que

$$dc = (6{,}7 + 0{,}000656 \cdot 5000)(-0{,}5) = (6{,}7 - 3{,}28)(-0{,}5) = 3{,}42(-0{,}5) = -1{,}71$$

Conclusión: Si la producción inicial, de 5000 docenas de pares de medias, disminuye en media docena de pares, el costo total disminuye aproximadamente en $1,71.

4.-El ingreso por concepto de venta de q quintales de un producto es $I = 250q + 45q^2 - q^3$. Analice cuál es la variación aproximada del ingreso si la demanda varía de 10 a 10,25 quintales.

Planteamiento

q: quintales de producto demandada.

$I = 250q + 45q^2 - q^3$ (Ingreso total)

$q_0 = 10$ (Demanda inicial)

$\Delta q = 10{,}25 - 10 = 0{,}25$ (Variación de la demanda)

$\Delta I \approx ?$ (Objetivo del problema)

Resolución

$\Delta I \approx dI = (250q + 45q^2 - q^3)' dq = (250 + 90q - 3q^2)\, dq$. Para $q_0 = 10$ y $\Delta q = 0{,}25$,

$$dI = (250 + 90 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2)\ 0{,}25 = (1150 - 300)\ 0{,}25 = 850 \cdot 0{,}25 = 212{,}5$$

Conclusión: El ingreso aumenta aproximadamente en $212,5 si la cantidad de producto varía de 10 a 10,25 quintales, o sea, si la demanda aumenta en 0,25, el ingreso aumenta en $212,5.

5.-Sea $p = 100 - q^2$ el precio de un producto, donde q es la cantidad de unidades del mismo. Analice cuál es la variación aproximada del precio si la cantidad de producto disminuye desde 5 hasta 4 unidades.

Planteamiento

q: unidades de producto demandadas

$p = 100 - q^2$ (Precio como función de la demanda)

$q_0 = 5$ (Demanda inicial)

$\Delta q = 4 - 5 = -1$ (Variación de la demanda)

$\Delta p \approx ?$ (Objetivo del problema)

Resolución

$\Delta p = dp = (100 - q^2)' \cdot dq = -2q \cdot dq$

Para $q_0 = 5$ y $\Delta q = -1$ nos queda que

$dp = -2 \cdot 5(-0{,}1) = 10$

Conclusión: Si la cantidad de producto disminuye de 5 a 4 unidades, entonces el precio aumenta en $10, o sea, si la cantidad de producto disminuye en una unidad, el precio aumenta en $10.

Ejercicios

Ejercicio	**Incisos**	**Página**	**Contenido**	**Bibliografía**
16	1–3; 6	67	Derivada del producto	Laboratorio de Matemática
17	1–4	68	Derivada del cociente	Superior
20	1–9	69	Derivada de la potencia	
28	1–5; 7–11	71	Derivadas de logaritmos	
28a)	1–7;10–17	72	Derivada de exponencial	
36	1-6a)-d)	81	Derivadas de orden superior	
9-10	-	82	"	

2.-Determine la ecuación de la tangente y la normal a la curva $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ en el punto donde; $x = -1;\ x = 0;\ x = 1;\ x = 2$.

3.-Halle la ecuación de la tangente y la normal a la curva $y = \dfrac{10}{x+1}$ en los puntos (1; 5) y (0; 10).

4.-Halle la ecuación de la tangente a la curva $y = x^2 + 1$ que es paralela a la recta $y = x + 3$.

5.-Halle la ecuación de la recta que pasa por origen y es paralela a la tangente a la curva:

a) $y = e^x$ en el punto (0; 1) b) $y = x^3 + 2$ en el punto donde $x = 2$

6.-Halle los puntos de la curva $y = x^2 - 2x$ en los cuales la tangente es horizontal.

7.-¿En qué punto de la curva de la curva $y = \sqrt[3]{x}$, la tangente es paralela al eje y?

8.-Unos sociólogos, al estudiar la relación que entre el ingreso personal y el número de años de estudios de los miembros de grupo urbano, descubrieron que se puede esperar que una persona con x años de estudio, antes de buscar un empleo fijo, recibe un ingreso anual de y dólares por año, donde $y = 4x^{5/2} + 4900$ con $4 \le x \le 16$.

Halle la tasa de cambio del ingreso personal con respecto al número de años de estudio.

Evalúela para x=9 e interprete el resultado.

9.-En las siguientes funciones, C es el costo de producir q unidades de un producto. En cada caso:

a) Halle la función de costo marginal,

b) Halle el costo marginal para las cantidades de producto dadas,

c) Interprete el resultado.

9.1) $C = 500 + 10q$ para q=100. 9.2) $C = 0{,}03q^3 - 0{,}6q^2 + 4.5q + 7700$ para q=20.

9.3) $C = 50000 + 6q$ para q=36. 9.4) $C = q^2 + 50q + 1000$ para q=15.

9.5) $C = 0{,}1q^2 + 3q + 2$ para q=3. 9.6) $C = 0{,}3q^2 + 2q + 850$ para q=3.

10.-En las siguientes funciones I representa el ingreso total por concepto de venta de q unidades de un producto. En cada caso:

a) Determine la función de ingreso marginal

b) Halle el ingreso marginal para cada valor de q,

c) Interprete el resultado obtenido en el inciso b).

10.1) $I = 0{,}7q$ para q=8, q=100, q=2000. 10.2) $I = 15q - \frac{1}{30}q^2$ para q=5, q=15, q=150.

10.3) $I = 60q - 0{,}2q^2$ para q=10, q=20. 10.4) $I = 250q + 45q^2 - q^3$ para q=5, q=10.

11.-Como resultado de un análisis estadístico realizado en una fábrica, se estimó que el costo total de fabricar x docenas de pares de medias es $c = -10484{,}69 + 6{,}75q - 0{,}000328q^2$ **. Halle el costo marginal cuando el nivel de producción sea de 5000 docenas de pares de medias.**

12.-Con el método de depreciación en línea recta se determinó que el valor v de una máquina después de t años está dado por $v = 50000 - 5000t$ **, donde** $0 \le t \le 10$**.**

¿Cuál es la razón de cambio del valor de la máquina después de 2 años de explotación?

¿Cuál es el valor marginal de la máquina al cabo de 3 años de explotación?

Interprete los resultados anteriores.

13.-Si la función de consumo está dada por $C = \dfrac{5(2\sqrt{I^3} + 3)}{I + 10}$ **. Determine la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro si el ingreso es de $100.**

14.-Dada las siguientes ecuaciones de demanda siguientes:

a) Calcule la elasticidad de la demanda,

b) Calcule la elasticidad para los precios indicados en cada caso,

c) Interprete el resultado económicamente y clasifique la demanda.

14.1) $q = 600 - 100p; \quad p = 3$

14.2) $q = p^2 - 60p + 898; \quad p = 10$

14.3) $q = \dfrac{(p-100)^2}{2}; \quad p = 20$

14.4) $q = \sqrt{2500 - p^2}; \quad p = 20$

14.5) $q = \sqrt{2500 - p}; \quad p = 900$

14.5) $q = 100 - p; \quad p = 50$

15.-Dada la ecuación de demanda $p + 0{,}05q = 13$ **. Calcule, interprete y clasifique la elasticidad de la demanda para:**

a) $p = 10$

b) $p = 3$

c) $p = 6{,}50$

16.-Dada las siguientes ecuaciones de demanda. Determine para qué valores de q los porcientos de variación del precio y de la demanda son equivalentes.

a) $p = 26 - 0{,}1q$ b) $p = 1200 - q^2$

17.-Dada la función de oferta $q = mp + n,\ \ m > 0$. Analice bajo qué condición la oferta es elástica, inelástica o de elasticidad unitaria.

18.-Con la información dada en cada caso:

a) Calcule Δy ,

b) Calcule dy,

c) Haga un análisis del error que se comete al estimar Δy a través de.

18.1) $y = x^2;\ \ x = 1;\ \ \Delta x = 0{,}01$

18.2) $y = x^3 - x;\ \ x = 10;\ \ \Delta x = -0{,}1$

18.3) $y = x;\ \ x_0 = 4;\ \ x_1 = 4{,}41$

18.4) $y = x^3 + 2x;\ \ x_0 = 2;\ \ x_1 = 1{,}98$

19.-El ingreso por concepto de venta de q unidades de un producto viene dado por $I = 40q - q^2$. Si inicialmente se producían 3 unidades de producto, cuál es la variación aproximada del ingreso si la producción disminuye en una unidad.

20.-El precio unitario de un producto es $p = 20 - \sqrt{q}$ donde q es la demanda semanal. Analice cual es la variación aproximada del precio si la demanda disminuye de 100 a 99 unidades de producto.

21.-Sea $u = -400 + 396q - 2{,}2q^2$ la utilidad que se obtiene al fabricar q unidades de un producto. Determine la variación aproximada de la utilidad si el nivel de producción cambia de 80 a 81 unidades de producto.

22.-La función de consumo está dada por $C = \dfrac{5(2\sqrt{I^3} + 3)}{I + 10}$. Halle la variación aproximada del consumo si el ingreso aumenta de \$100 a \$102.

CAPÍTULO 4. APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.1.-Regla de L´Hospital

Existe una gran cantidad de casos de indeterminaciones que no se pueden resolver con las reglas estudiadas en el tema de Límite y Continuidad. Muchos de estos problemas se resuelven con la regla de L´Hospital, en la cual se aplica la derivada para calcular el límite. La regla de L´Hospital se establece a través del siguiente teorema.

TEOREMA. El límite del cociente de dos funciones infinitas o infinitesimales, es igual al límite del cociente de sus derivadas (finito o infinito) si este existe (en el sentido indicado).

Observaciones:

1.-Para aplicar la regla de L´Hospital tiene que aparecer la indeterminación $\frac{0}{0}$ *ó* $\frac{\infty}{\infty}$, lo cual debe comprobarse en cada paso.

2.-Téngase en cuenta que se calcula el cociente de las derivadas y no la derivada del cociente, o sea, $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

3.-La regla de L´Hospital debe usarse en combinación con las demás ya conocidas, y no pensar en ella como algo omnipotente.

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{2x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

Las demás indeterminaciones también se pueden resolver aplicando la regla de L´Hospital. Para eso es necesario transformar la expresión dada en una equivalente que cumpla con las condiciones que exige la regla. Por ejemplo, la indeterminación $\infty - \infty$ aparece en expresiones de la forma $f(x) - g(x)$. En ocasiones, basta con efectuar la diferencia y se transforma automáticamente en un cociente al que se le puede aplicar la regla.

Ejemplo:

c) $$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x}{x-5} - \frac{50}{x^2-25}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{x(x+5)-50}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{x^2+5x-50}{x^2-25} = \lim_{x\to 5} \frac{2x+5}{2x} = \frac{3}{2}$$

La indeterminación $0\cdot\infty$ aparece en expresiones de la forma $f(x)\cdot g(x)$, las que se transforman en cociente, dividiendo uno de los factores por el recíproco del otro, según convenga, o sea:

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o} \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Ejemplos:

d) $$\lim_{x\to +\infty} x^2\cdot 5^{-x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{5^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{5^x \ln 5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{5^x \ln^2 5} = 0$$

e) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$

Las indeterminaciones $0^0, \infty^0$ y 1^∞ aparecen en expresiones de la forma $[f(x)]^{g(x)}$. En los tres casos se procede de la misma forma: Se hace $[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\cdot \ln(f(x))}$ (en el exponente siempre aparecerá la indeterminación $0\cdot\infty$). Luego se calcula el límite del exponente procediendo de manera análoga a como se hizo en los ejemplos d) y e).

Ejemplos:

f) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$ (Vea inciso e)

g) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x^2}\ln x} = e^\alpha$ donde:

$\alpha = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}\ln x = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$. Por tanto, $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1.$

h) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{3}{x-1}} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{3}{x-1}\ln x} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{3\ln x}{x-1}} = e^z$ donde:

$z = \lim_{x\to 1} \frac{3\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3\cdot\frac{1}{x}}{1} = 3$. Por tanto, $\lim_{x\to 1} x^{\frac{3}{x-1}} = e^3$.

4.2.-Monotonía y Extremos locales

A continuación, estudiaremos dos propiedades importantes de las funciones que, más adelante, nos servirán para trazar su gráfico. Nos referimos al análisis de la monotonía y la existencia de extremos locales.

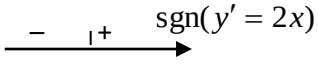
Recordemos que una función $y = f(x)$ es creciente (decreciente) en un intervalo si para todos los puntos de ese intervalo, a medida que la x aumenta, la y aumenta (disminuye).
El teorema siguiente nos ofrece una condición necesaria y suficiente para analizar la monotonía de una función en un intervalo donde dicha función es derivable.

TEOREMA. Una función f, derivable en $]a,b[$, es creciente (decreciente) en ese intervalo si y solo si $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ para todo $x \in]a,b[$.

Ejemplo:

a) La función $y = x^2$ es derivable en todo R.

$y' = 2x = 0$ para $x = 0$.



0 x

.

Por tanto, $y = x^2$ es decreciente en $]-\infty;0[$ y creciente en $]0;+\infty[$ (Fig. 4.1)

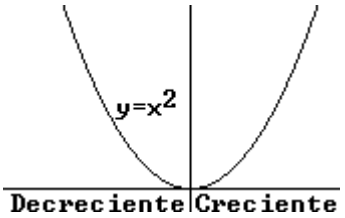


Figura 22. Monotonía y Extremos locales.

Recordemos además que una función alcanza su valor un máximo (mínimo) en el punto x_0 si para todo $x \in \mathrm{Dom}\, f$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$. En este caso $y_0 = f(x_0)$ es el valor máximo (mínimo) de la función y se denomina extremo global o extremo absoluto de la función porque es el mayor (menor) valor de la función entre todos los puntos donde la función está definida.
Hay otros tipos de extremos, llamados extremos locales, que se definen como sigue.

DEFINICIÓN. Una función f tiene un máximo (mínimo) local en el punto x_0 si existe una vecindad de x_0 tal que $f(x_0) \geq f(x)$ $(f(x_0) \leq f(x))$ para todo x de dicha vecindad. $y_0 = f(x_0)$ es un valor máximo (mínimo) local de la función y (x_0, y_0) es un punto máximo (mínimo) local del gráfico de f.

Observaciones:

1.-En los puntos máximo locales, la curva presenta una cumbre. Por ejemplo, (x_1, y_1) y (x_3, y_3) (Fig. 4.2).

2.-En los puntos mínimo locales, la curva presenta una hondonada. Por ejemplo, (x_2, y_2) y (x_4, y_4) (Fig. 4.2).

3.-A los valores máximo y mínimo locales de la función f se les llama extremos locales de f. Esto se debe a que ellos son máximos o mínimos entre los puntos que están alrededor de x_0, lo cual no tiene que cumplirse en otra parte del dominio; incluso, puede suceder que un máximo local sea menor que un mínimo local. En la figura 4.2 se puede ver qué $y_1 < y_4$.

4.-Nótese finalmente que en los puntos donde la curva tiene un extremo local, la tangente es horizontal y, por tanto, su pendiente es cero. Esto lo confirma teorema siguiente.

TEOREMA. Si f es derivable en un punto x_0 donde tiene un extremo local, entonces $f'(x_0) = 0$
Observaciones:

5.-El teorema anterior nos da una condición necesaria para la existencia de extremos. Eso significa que una función no puede tener extremos en puntos donde $f'(x) \neq 0$.

6.-La condición no llega a ser suficiente, pues hay funciones que no tienen extremos en puntos donde $f'(x) = 0$. Por ejemplo:

Sea $y = x^3$. Su derivada, $y' = 3x^2$, se anula para $x = 0$; sin embargo, $y = x^3$ no tiene extremo en $x = 0$ porque para $x < 0$ se cumple que $0^3 > x^3$, mientras que para $x > 0$ se tiene que $0^3 < x^3$.

7.-Hay funciones que tienen extremos en puntos donde non son derivables. Por ejemplo:

La función $y = |x|$ tiene un mínimo en $x = 1$; sin embargo, no es derivable en ese punto.

8.-Los únicos puntos donde puede haber extremos son aquellos donde $f'(x) = 0$ o donde $f'(x)$ no está definida. Estos puntos se denominan puntos críticos de primera especie.

Ahora bien, ¿cómo se analiza si en un punto crítico hay un extremo? En el caso que haya extremo, ¿cómo se sabe si es máximo o mínimo?

Para responder a estas inquietudes, observemos de nuevo a la figura 3.2. Nótese que en los puntos donde hay extremos, cambia la monotonía de la función. Específicamente, si f tiene un máximo en un punto, entonces f es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha de ese punto. Por el contrario, si f tiene un mínimo en un punto, entonces f es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha de dicho punto. Relacionando esto con el signo de la derivada se obtiene la condición para la existencia de extremos que se expresa en el siguiente teorema.

TEOREMA. Sea f una función continua x_0 y derivable en una vecindad reducida de x_0. Entonces f tiene un extremo en x_0 sí y solo si $f'(x)$ cambia de signo cuando x pasa por x_0 de izquierda a derecha. El extremo es máximo si $f'(x)$ es positiva para $x < x_0$ y negativa para $x > x_0$.El extremo es mínimo si $f'(x)$ es negativa para $x < x_0$ y positiva para $x > x_0$.

Ejemplo:

b) Determine los intervalos de monotonía y los extremos locales de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1.-Se calcula la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

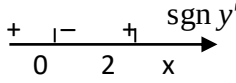
2.-Se determinan los ceros de la derivada:

$$3x^2 - 6x = 0$$
$$3x(x-2) = 0$$
$$x = 0;\ \ x = 2.$$

3.-Se determinan los puntos donde la derivada no está definida:

En este caso no hay puntos que indefinan a la derivada porque es un polinomio.

4.-Se determina el signo de la derivada en los intervalos determinados por los puntos críticos.



5.-Se interpreta el signo de la derivada y se dan las conclusiones:

a) La función es creciente en los intervalos $]-\infty;0[$ y $]2;+\infty[$ porque en ellos $f'(x) > 0$.

b) La función es decreciente en el intervalo $]0;2[$ porque en ese intervalo $f'(x) < 0$.

c) En $x = 0$, la función tiene un máximo local porque f es continua en $x = 0$ y la derivada cambia el signo de positivo a negativo, cuando x paso por cero de izquierda a derecha.

$y_{\max} = f(0) = 2$ (Valor máximo local de la función)

(0; 2) (Punto máximo local del gráfico).

d) En $x = 2$, la función tiene un mínimo local porque f es continua en $x = 2$ y la derivada cambia el signo de negativo a positivo, cuando x paso por cero de izquierda a derecha.

$y_{\min} = f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = -2$ (Valor mínimo local de la función)

(2; -2) (Punto mínimo local del gráfico)

4.3.-Concavidad y Puntos de Inflexión

Para trazar exitosamente el gráfico de una función es importante tener en cuenta hacia donde está dirigida la concavidad (hacia arriba o hacia abajo) y en qué puntos se produce el cambio de la dirección de la concavidad (puntos de inflexión).

DEFINICIÓN. Una función es cóncava hacia arriba (hacia abajo) en un intervalo si en todos los puntos de ese intervalo la curva queda por encima (por debajo) de la tangente. El punto donde cambia la dirección de la concavidad se denomina punto de inflexión.

La función de la figura 4.3, es cóncava hacia abajo en] a, b [, cóncava hacia arriba en] b, c [y tiene un punto de inflexión en $x = b$. Nótese que, en el punto de inflexión, la tangente atraviesa la curva.

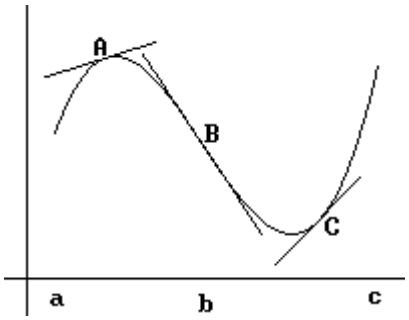


Figura 23. Concavidad y Puntos de inflexión.

TEOREMA. Sea f una función continua en [a, b] y dos veces derivable en] a, b [. Entonces el gráfico de $y = f(x)$ tiene la concavidad dirigida hacia arriba (hacia abajo) en [a, b] si y solo si para todo $x \in]a,b[$ se cumple que $f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$.

Según el teorema anterior, los puntos donde $f''(x) \neq 0$ no pueden ser puntos de inflexión.

Los únicos puntos donde puede haber inflexión son aquellos en los que $f''(x) = 0$ ó $f''(x)$ no está definida y denominan puntos críticos de segunda especie.

TEOREMA. Sea $y = f(x)$ una función continua en el punto crítico de segunda especie x_0 y dos veces derivables en una vecindad reducida de x_0. Si $f''(x)$ cambia de signo en x_0, entonces $(x_0, f(x_0))$ es un punto de inflexión del gráfico de f.

Ejemplo: Determine los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1.-Se calcula la segunda derivada:

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

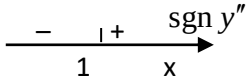
2.-Se determinan los ceros de la segunda derivada:

$$6x - 6 = 0$$
$$6(x - 1) = 0$$
$$x = 1$$

3.-Se determinan los puntos donde la segunda derivada no está definida:

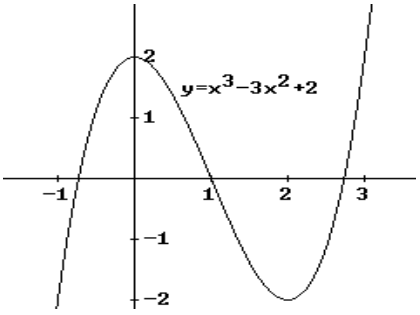
No hay puntos que indefinan a la segunda derivada porque es un polinomio.

4.-Se analiza el signo de la segunda derivada:



5.-Se interpreta el signo de la segunda derivada y se dan las conclusiones:

a) La curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-\infty;1[$ porque ahí $f''(x) < 0$.



b) La curva es cóncava hacia arriba en el intervalo $]1;+\infty[$ porque ahí $f''(x) > 0$.

c) En $x = 1$, la función tiene un punto de inflexión porque es continua en $x = 1$ y la segunda derivada cambia de signo en ese punto.

$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 0$; por tanto, (1; 0) es el punto de inflexión del gráfico.

De acuerdo con estos resultados y los del ejemplo b) del epígrafe anterior, la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ es continua en todo R, es creciente en los intervalos $]-\infty;0[$ y $]2;+\infty[$, es decreciente en el intervalo $]0;2[$, tiene un máximo local en (0; 2), tiene un mínimo local en (2; -2), es cóncava hacia abajo en $]-\infty;1[$, cóncava hacia arriba $]1;+\infty[$ y tiene un punto de inflexión en (1; 0).

4.4.-Trazado de curvas

Para trazar con precisión el gráfico de una función hay que analizar los siguientes aspectos:

I.-Dominio de definición.

Se determina el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función está definida.

II.-Paridad.

Se halla $f(-x)$ y se compara con $f(x)$. Entonces:

- Si f $f(-x) = f(x)$ la función es par; por tanto, el gráfico es simétrico con respecto al Eje y.
- Si $f(-x) = -f(x)$ la función es impar. El gráfico es simétrico con respecto al origen (0; 0).
- Si $f(-x) \neq \pm f(x)$ la función no es par ni impar.

III.-Continuidad y comportamiento en los puntos de discontinuidad.

a) Se determina el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función es continua.

b) Se analiza el comportamiento de la función en los puntos de discontinuidad. Para eso, se calcula el límite de la función por ambos lados de los puntos de discontinuidad y se interpreta el resultado geométricamente en cada caso.

IV.-Comportamiento en el infinito.

a) Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y se interpreta geométricamente el resultado.

b) Se calcula el $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y se interpreta geométricamente el resultado: Si la función es par, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ y si la función es impar, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

V.-Intersección con los ejes.

a) Los puntos de intersección del gráfico con el Eje x, si existen, son los ceros de la función.

b) El punto de intersección del gráfico con el Eje y, si existe, es $(0; f(0))$.

VI.-Monotonía y extremos locales.

1.-Se calcula la primera derivada.
2.-Se hallan los ceros de la primera derivada.
3.-Se determinan los puntos para los cuales la primera derivada no está definida.
4.-Se determina el signo de la primera derivada en cada intervalo de monotonía.
5.-Se clasifica la monotonía en cada intervalo: Si $f'(x) > 0$, la función es creciente y si $f'(x) < 0$, la función es decreciente.
6.-Se deduce en qué punto hay extremo local:
a) Máximo, si la función es continua en el punto y la derivada cambia el signo de + a –.
b) Mínimo, si la función es continua en el punto y la derivada cambia el signo de – a +.

VII.-Concavidad y puntos de inflexión.

1.-Se calcula la segunda derivada.
2.-Se hallan los ceros de la segunda derivada.
3.-Se determinan los puntos para los cuales la segunda derivada no está definida.
4.-Se determinan el signo de la segunda derivada en cada intervalo de concavidad.
5.-Se clasifica la concavidad en cada intervalo: Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava hacia arriba y si $f''(x) < 0$, la función es cóncava hacia abajo.
6.-Se deduce donde hay puntos de inflexión, o sea, aquellos puntos donde la función es continua y la segunda derivada cambia el signo.

Ejemplo:

a) Analice los aspectos anteriores y trace el gráfico de $y = e^{-x^2}$

I.-Dominio: $\text{Dom } f = \text{R}$

II.-Paridad.

$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$. La función es par; por tanto, su gráfico es simétrico con respecto al Eje y.

III.-Continuidad y comportamiento en los puntos de discontinuidad.

La función es continua porque es la composición de dos funciones continuas.

IV.-Comportamiento en el infinito.

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$. Por tanto, la recta $y = 0$ (Eje x) es una asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$. Eso mismo ocurre cuando $x \to -\infty$ porque la función es par.

V.-Intersección con los ejes.

a) La curva no corta al Eje x, porque $y = e^{-x^2} > 0$ para todo $x \in$ R.

b) $f(0) = e^{-(0)^2} = 1$. El punto de intersección del gráfico con el Eje y es (0; 1).

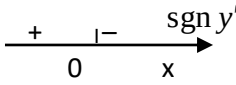
VI.-Monotonía y extremos locales.

1) $y' = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$

2) $y' = -2xe^{-x^2} = 0$ para $x = 0$.

3) La derivada $y' = -2xe^{-x^2}$ no se indefine para ningún número real.

4) Signo de la derivada $y' = -2xe^{-x^2}$



5) La función $y = e^{-x^2}$:

a) Es creciente en $]-\infty;1[$ porque $y' > 0$.

b) Es decreciente en $]1;+\infty[$ porque $y' < 0$.

c) Tiene un máximo local en $x = 1$ porque es continua en él e y' cambia el signo de + a –. El punto máximo local del gráfico es (0; 1).

VII.-Concavidad y puntos de inflexión.

1) $y'' = (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + (-2x)e^{-x^2}(-2x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2-2)e^{-x^2}$

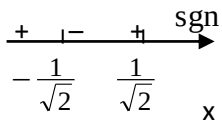
$= (4x^2-2)e^{-x^2} = 4(x^2-\frac{1}{2})e^{-x^2} = 4\left(x+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)e^{-x^2} = 4\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$

2) $y'' = 4\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2} = 0$ para $x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) La segunda derivada no se indefine para ningún número real.

$$y'' = 4\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-x^2}$$

4) Signo de la segunda derivada



5) La función $y = e^{-x^2}$:

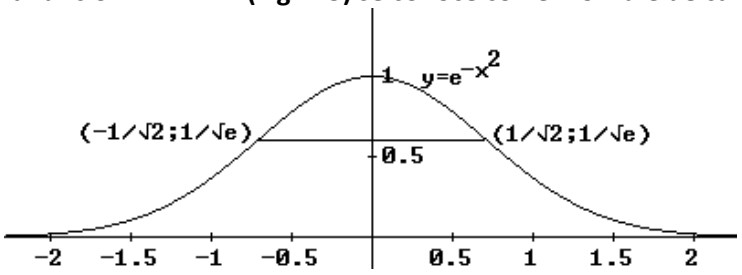
a) Es cóncava hacia arriba en los intervalos $\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ y $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};\infty\right[$ porque $y'' > 0$.

b) Es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ porque $y'' < 0$.

c) Tiene puntos de inflexión en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = e^{-(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Los puntos de inflexión son $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

VIII.-El gráfico de la función $y = e^{-x^2}$ (Fig. 4.5) se conoce con el nombre de campana de Gauss.



4.5.-Problemas de optimización

Se llama problema de optimización a aquel en el que es necesario hallar el valor máximo o el valor mínimo de una función. Esos valores, que coinciden con los extremos absolutos de la función, se denominan valores óptimos.
La resolución de estos problemas la desarrollaremos en tres etapas: planteamiento del modelo, resolución del modelo y conclusiones, tal como hemos venido haciendo con otros modelos.

I.-Planteamiento del modelo. Aquí se acopian todos los datos que conforman el modelo clásico de optimización en una variable:
a) Variable de decisión: Magnitud incógnita, que será la variable independiente de la función objetivo.
b) Restricciones: Condiciones, que debe cumplir la variable de decisión, bajo las cuales se resuelve el problema. En los problemas económicos, generalmente, la variable es no negativa. Además de esta, pueden existir otras restricciones en forma de ecuaciones o inecuaciones.
c) Función objetivo: Función a la que se le debe hallar el valor óptimo.
d) Criterio de optimización: Maximizar o minimizar la función objetivo.

II.-Resolución del modelo. Se resuelve, matemáticamente, el modelo elaborado aplicando la derivada. Como se parte de un criterio de optimización, obtenido de la naturaleza del problema, este indica el tipo de extremo que se debe determinar. Por esta razón, si el problema está bien planteado, puede omitirse el análisis de la condición suficiente.

III.-Conclusiones. Finalmente se hace una interpretación del resultado obtenido en la resolución del modelo de acuerdo con lo que pida el problema y se dan las conclusiones.

Ejemplos:

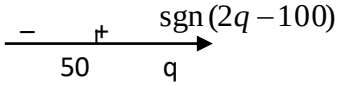
PROBLEMA 1. El costo de fabricación de q unidades de un producto es $C = q^2 - 100q + 2600$. ¿Cuál es el nivel producción para el cual el costo es mínimo? Halle el costo mínimo.

Planteamiento:

q: unidades de producto fabricadas.
$q \geq 0$: Condición de no negatividad.
$C = q^2 - 100q + 2600$: Costo total (en $)
$\min C$

Resolución:

1) La derivada de C es $C' = (q^2 - 100q + 2600)' = 2q - 100$
2) Hallemos los ceros de la derivada: $2q - 100 = 0$ para $q = 50$.
3) La derivada no se indefine para ningún número real.
4) El signo de la derivada queda como sigue:



Conclusiones:

a) El costo total es mínimo cuando el nivel de producción es de 50 unidades de producto.

b) El costo mínimo es $C(50) = 50^2 - 100 \cdot 50 + 2600 = \$100$

PROBLEMA 2. El precio de un producto, en función de la demanda, es $p = 200 - 2q$. ¿Qué cantidad de producto hay que vender para que el ingreso sea máximo? Halle el ingreso máximo. Halle el precio de venta.

Planteamiento:

q: unidades de producto demandadas.

$q \geq 0$: Condición de no negatividad.

$I = p \cdot q = (200 - 2q)q = 200q - 2q^2$: Ingreso total (en $)

$\max I$

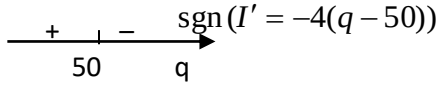
Resolución:

1) $I' = (200q - 2q^2)' = 200 - 4q$

2) $200 - 4q = 0$ para $q = 50$

3) I' no se indefine para ningún valor de q.

4) El signo de I' queda como sigue



Conclusiones:

a) Para que el ingreso sea máximo se deben vender 50 unidades de producto.

b) El ingreso máximo es $I(50) = 200 \cdot 50 - 2 \cdot 50^2 = 10000 - 5000 = 5000$

c) El precio de venta es $p(50) = 200 - 2 \cdot 50 = 200 - 100 = 100$

PROBLEMA 3. El costo de producción de x metros de tela es $C = x^2 - 10x + 1000$. El precio de cada metro es $p = 198 - 3x$. ¿Cuántos metros de tela hay que fabricar para que la ganancia sea máxima?

Planteamiento:

x: metros de tela a producir

$x \geq 0$: Condición de no negatividad.

$g = I - C = p \cdot q - C = (198 - 3x)x - (x^2 - 10x + 1000)$

$g = -4x^2 + 208x - 1000$: Ganancia (en $)

$\max g$

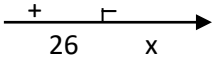
Resolución:

1) $g' = (-4x^2 + 208x - 1000)' = -8x + 208$

2) $g' = -8(x - 26) = 0$ para $x = 26$

3) $g' = -8x + 208$ no se indefine para ningún número real porque es una función lineal.

4) $\operatorname{sgn} g'$



Conclusiones:

a) Para que la ganancia sea máxima hay que fabricar 26m de tela.

b) La ganancia máxima es $g(26) = -4 \cdot 26^2 + 208 \cdot 26 - 1000 = \$1704$.

PROBLEMA 4. La cantidad de producto que se puede elaborar utilizando dos materias primas en cantidades x e y, cuyos precios unitarios son \$9 y \$15 respectivamente, viene dada por $q = 3xy$. ¿Qué cantidad de cada materia prima se debe utilizar para elaborar 45 unidades de producto con el costo mínimo?

Planteamiento:

x: unidades de materia prima 1
y: unidades de materia prima 2
$x,\ y > 0$
$3xy = 45$ unidades de producto.
$C = 9x + 25y$ (Función de costo).
$\min C = 9x + 15y$

Resolución

1) De $3xy = 45$ se obtiene que $y = \frac{15}{x}$. Con esto la función objetivo queda en una variable.

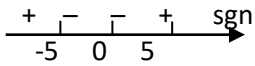
$$C = 9x + 15 \cdot \frac{15}{x} = \frac{9x^2 + 225}{x}$$

2) $$C' = \left(\frac{9x^2 + 225}{x} \right)' = \frac{18x \cdot x - (9x^2 + 225)}{x^2} = \frac{18x^2 - 9x^2 - 225}{x^2} = \frac{9x^2 - 225}{x^2} = \frac{9(x+5)(x-5)}{x^2}$$

3) $C' = \frac{9(x+5)(x-5)}{x^2} = 0$ para $x = -5;\ x = 5$.

4) C' se indefine para $x = 0$

5) El signo de C´ queda como sigue



Conclusión

a) Los valores –5 y 0 no se tienen en cuenta porque $x,\ y$ tienen que ser positivas. Para $x = 5$, $y = \frac{15}{5} = 3$; por tanto, para producir para producir 45 unidades de producto con el costo mínimo es necesario utilizar 5 unidades de materia prima 1 y 3 unidades de materia prima 2.

b) El costo mínimo es $C = 9 \cdot 5 + 15 \cdot 3 = \$90$

Ejercicios

1.-Calcule los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$ **c)** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ **d)** $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{5}{1-x}}$

e) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ **f)** $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ **g)** $\lim_{x\to 0^+}(e^{3x}-5x)^{\frac{1}{x}}$ **h)** $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$ **j)** $\lim_{x\to 0^+}(1-e^{-x})^{e^x}$ **k)** $\lim_{x\to 1^+}\ln x\cdot\ln(x-1)$ **l)** $\lim_{x\to 0^+} x^{2x}$

2.-Haga un esbozo del gráfico de los siguientes polinomios donde se refleje la monotonía, los extremos locales, la concavidad y los puntos de inflexión.

a) $y=x^3-4x^2+4x$ **b)** $y=\frac{1}{4}(x^3-3x+2)$

c) $y=\frac{1}{2}(3x-x^3)$ **d)** $y=\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2$

3.-Haga un análisis de las siguientes funciones en cuanto a: dominio, paridad, continuidad, comportamiento en el infinito, intersección con los ejes, monotonía, extremos, locales, concavidad y puntos de inflexión. Trace el gráfico.

a) $f(x)=x^3-3x$ **b)** $f(x)=x^4-2x^2$ **c)** $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ **e)** $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ **f)** $f(x)=\dfrac{3x}{e^{\frac{1}{2}x^2}}$

g) $f(x)=x\cdot\ln x$ **h)** $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ **i)** $f(x)=x^2\ln(x^2)$

4.-El precio unitario de un producto, en función de la demanda, es $p=(80-q)/4$ **. Determine la demanda que hace máximo el ingreso. Halle el ingreso máximo.**

5.-La ecuación de demanda de un producto es $p+5q=30$ **. ¿A qué precio se maximizan los ingresos? Halle ingreso máximo.**

6.-La demanda de un producto es $q=10000e^{-0,02p}$ **. Halle el precio al cual el ingreso es máximo.**

7.-El costo operación de un taxi en una hora de trabajo es $C=0,08+0,12v-0,0012v^2$ **, donde v (**$0\le v\le 60$**) es la velocidad en millas por hora. ¿A qué velocidad el costo es mínimo?**

8.-Una empresa puede vender x artículos por semana a un precio de p pesos por artículo. La ecuación de demanda es $5x=375-3p$ **. El costo total de producción es** $C=500+15x+0,2x^2$ **. ¿Cuántos artículos se deben vender para que la utilidad sea máxima? Halle esa utilidad.**

9.-El costo producción de q unidades de un producto es $C = -0{,}5q^3 + 3q^2 + 20q$ **y el precio unitario es** $p = 50 - 0{,}5q$ **. ¿Para qué nivel de producción se obtiene la ganancia es máxima? Halle la máxima ganancia.**

10.-Un zapatero produce x pares de botas diariamente con un costo total de $C = 3x^2 + 8x + 1$ **pesos. Si el precio de venta de cada par de botas es** $p = 120 - x$ **, ¿cuántos pares debe fabricar diariamente para que la ganancia sea máxima?**

11.-El costo de fabricación de un producto es de $3 por unidad y el precio, en función de la demanda es $p = \frac{10}{\sqrt{q}}$ **. Determine el precio que las utilidade**

CAPÍTULO 5. INTEGRAL INDEFINIDA

En este tema nos enfrentaremos a un problema de la Matemática que tiene una estrecha relación con el cálculo de la derivada, pero en sentido inverso.

Para que se tenga una idea del problema que nos ocupa, recordemos que en el tema derivada vimos que dada una función $y = f(x)$, su diferencial se obtiene por la fórmula $dy = f'(x)dx$. Este proceso se denomina diferenciación.

Ahora haremos lo contrario, o sea, dado el diferencial $dy = f'(x)dx$ de una función $y = f(x)$, encontrar dicha función. Este proceso se denomina integración y es la operación inversa de la diferenciación, como se indica en el siguiente esquema.

$$y = f(x) \quad \begin{matrix} \text{diferenciación} \\ \text{integración} \end{matrix} \quad dy = f'(x)dx \qquad \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{matrix}$$

La integración, al igual que la derivación, tiene importantes aplicaciones en el campo de la Economía. Estos problemas son aquellos en los que es necesario buscar la función total a partir de la función marginal. Por tanto, al concluir este tema los estudiantes tienen que ser capaces de:

"Resolver problemas económicos y matemáticos aplicando la integral indefinida".

Para lograr este objetivo el estudiante debe saber:

- a qué se llama primitiva de una función,

- a qué se llama integral indefinida de una función y cuáles son sus propiedades,

- cuáles son las reglas de integración inmediatas,

- cuáles son los métodos de integración y cómo se aplican.

El estudiante, además, debe desarrollar habilidades para:

- interpretar el concepto de primitiva,

- calcular integrales aplicando las fórmulas,

- calcular integrales por sustitución,

- calcular integrales por partes,

- calcular integrales por descomposición en fracciones simples,

- obtener funciones totales a partir de las marginales,

- interpretar económicamente los resultados obtenidos en la resolución de problemas.

5.1.-Integral Indefinida

Para llegar al concepto de integral indefinida es necesario primero introducir el concepto de primitiva.

DEFINICIÓN. La función $P(x)$ se llama primitiva de la función $f(x)$ en un intervalo determinado, si para todos los puntos x de dicho intervalo se cumple que $P'(x) = f(x)$.

Ejemplos:

a) $P(x) = x$ es una primitiva de $f(x) = 1$, porque $x' = 1$

b) $P(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq 1)$ es una primitiva de $f(x) = x^n$, porque $\left(\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = \dfrac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$.

c) $P(x) = \ln x$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$, porque $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

d) $P(x) = -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, porque $\left(-\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}\right)' = \dfrac{n-1}{(n-1)x^n} = \dfrac{1}{x^n}$

e) $P(x) = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$ es una primitiva de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, porque

$$\left(\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}\right)' = \left(\frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}}\right)' = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n}x^{1/n} = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

f) $P(x) = \dfrac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}$, porque

$$\left(\frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)' = \left(\frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}}\right)' = \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}x^{-1/n} = x^{-1/n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}.$$

h) $P(x) = \dfrac{a^x}{\ln a}$ es una primitiva de $f(x) = a^x$, porque $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$.

i) $P(x) = e^x$ es una primitiva de $f(x) = e^x$, porque $(e^x)' = e^x$.

j) $P(x) = e^x + 4$ es una primitiva de $f(x) = e^x$, porque $(e^x + 4)' = e^x$.

Los ejemplos i) y j) demuestran que una función puede tener más de una primitiva en un intervalo. El teorema siguiente garantiza que dicha cantidad es infinita.

TEOREMA. Si $P(x)$ es primitiva de $f(x)$, entonces cualquier otra primitiva $\varphi(x)$ de $f(x)$ tiene la forma $\varphi(x) = P(x) + c$, donde c es una constante arbitraria.

Es bueno aclarar que $\varphi(x) = P(x) + c$ no es una función, sino un conjunto infinito de funciones, pues cada vez que c tome un valor distinto, se obtendrá una primitiva diferente.

Geométricamente $\varphi(x) = P(x) + c$ representa una familia de curvas paralelas entre sí; esto es así porque cada curva se obtiene trasladando la curva P(x), c unidades en la dirección del Eje y, hacia arriba o hacia abajo, según c sea positiva o negativa respectivamente (Fig. 4.1).

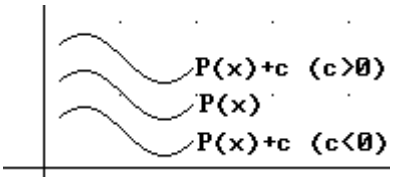


Figura 24. Integral Indefinida.

DEFINICIÓN. Se llama integral indefinida de la función f, al conjunto de todas las primitivas de f. Se denota por $\int f(x)\,dx$ y se lee: "Integral de $f(x)$, con respecto a x".

En la notación:

- $\int$ es el signo de integración,

- $f(x)$ se denomina integrando,

- dx indica que x es la variable de integración.

Como consecuencia del teorema enunciado anteriormente y de la definición de integral indefinida podemos plantear que si $P(x)$ es una primitiva de f (x), entonces

$$\int f(x)\,dx = P(x) + c$$.

La expresión anterior nos ofrece la metodología general para calcular la integral indefinida de una función, la cual consiste en determinar una primitiva del integrando y sumarle una constante arbitraria. Por tanto, de los ejemplos a) – i) analizados anteriormente se deduce que:

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \quad (x \neq 0)$

4) $\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c \quad (n \neq 1)$

5) $\int \sqrt[n]{x}\, dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + c$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{x^{n-1}} + c$

7) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8) $\int e^x\, dx = e^x + c$

Las fórmulas anteriores constituyen las reglas de integración de las funciones elementales básicas. Ahí solo falta la regla de integración de las funciones logarítmicas porque para integrar esas funciones hay que utilizar el método de integración por partes, que veremos más adelante.

Ejemplos:

a) $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$

b) $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$

c) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$

d) $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + c$

e) $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + c$

f) $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

g) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{3}{4}\sqrt{x^4} + c$

h) $\int \sqrt[4]{x}\, dx = \frac{4}{5}\sqrt{x^5} + c$

i) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$

j) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2} + c$

k) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + c$

l) $\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$

m) $\int 3^x\, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$

n) $\int 10^x\, dx = \frac{10^x}{\ln 10} + c$

5.2.-Propiedades de la Integral Indefinida

La integral indefinida cumple algunas propiedades que complementan la metodología general y la tabla de integrales inmediatas expuesta anteriormente. Entre estas propiedades, las más importantes son las que aparecen a continuación.

I) $\left(\int f(x)\, dx\right)' = f(x)$

II) $\int d(P(x)) = p(x) + c$

III) $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ IV) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Observaciones:

- La propiedad I es muy importante para rectificar si la integral está bien. Para eso, se deriva la integral que se ha obtenido como resultado y, si la derivada es el integrando, entonces la integral está bien; en caso contrario, la integral está mal.

- La propiedad II nos indica que, si la expresión que está bajo el signo integral, es el diferencial de una función, entonces la integral indefinida es la propia función más una constante arbitraria una constante arbitraria; por ejemplo,

$\int dx = x + c$.

- La propiedad III indica que los factores constantes se pueden sacar delante de la integral y la propiedad IV nos indica que, si el integrando es una expresión formada por suma y diferencia de otras funciones, la integral se puede calcular término a término.

Ejemplos:

a) $\int 5\,dx = 5\int dx = 5x + c$

b) $\int (3x+2)\,dx = 3\int x\,dx + 2\int dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + c$

c) $\int (5 - 4q + 9q^2)\,dq = \int (5 - 4q + 9q^2)\,dq = 5q - \frac{4q^2}{2} + \frac{9q^3}{3} + c = 5q - 2q^2 + 3q^3 + c$

d) $\int \frac{5x^3 - 4x^2 + 3x - 2}{x^3}\,dx = \int \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx = 5\int dx - 4\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x^2} - 2\int \frac{dx}{x^3}$

$= 5x - 4\ln|x| + 3\left(-\frac{1}{x}\right) - 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + c = 5x - 4\ln|x| - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + c$

e) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \sqrt{x}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + c$

f) $\int \frac{e^x + 8^x}{2^{x+1}}\,dx = \int \frac{e^x + 8^x}{2 \cdot 2^x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x + 8^x}{2^x}\,dx = \frac{1}{2}\int [(\frac{e}{2})^x + 4^x]\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{(\frac{e}{2})^x}{\ln(\frac{e}{2})} + \frac{4^x}{\ln 4}\right) + c$

5.4.-Integración por sustitución

Si el integrando no está en su forma básica, o sea, que su argumento no es x, sino una función u que depende que depende de x, entonces se emplea el método de integración por sustitución, el cual consiste en hacer un cambio de variable en el integrando de modo que la integral así obtenida se pueda calcular de manera inmediata. El método se basa en el siguiente teorema.

TEOREMA. Si $f(u)$ y la derivada de $u = g(x)$ son funciones continuas, entonces se cumple que

$$\int f(u)\,du = \int f[f(x)]\cdot g(x)\,dx$$

.

La expresión anterior, denominada fórmula de integración por sustitución, permite hacer la siguiente generalización de las reglas de integración de las funciones elementales básicas.

1) $\int du = u + c$

2) $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \quad (u \neq 0)$

4) $\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c \quad (n \neq 1)$

5) $\int \sqrt[n]{u}\,du = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + c$

6) $\int \frac{du}{\sqrt[n]{u}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{u^{n-1}} + c$

7) $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$

8) $\int e^u\,du = e^u + c$

El cálculo de integrales inmediatas se hace casi en forma mecánica; sin embargo, cuando las funciones aparecen en forma compuesta es necesario realizar los cuatro pasos lógicos que mostraremos a continuación.

Ejemplo: Calcular

a) $\int (2x+3)^4\,2dx$

.

1.-Identifique la expresión que va a integrar. Esto se hace en el integrando por simple inspección.

En este caso se va a integrar una potencia.

2.-Seleccione la regla que va utilizar. Para esto analice cuál de las reglas tiene, en el miembro izquierdo, la misma forma que la integral.

En este caso la regla 2)

3.-Seleccione los parámetros que exige la regla. Esto se hace en la función, comparándola con el miembro izquierdo de la regla seleccionada.

El miembro izquierdo de 2) tiene los parámetros u, n y du. En la función $\begin{cases} n = 4 \\ u = 2x + 3 \\ du = 2\ dx \end{cases}$.

En este caso el diferencial está completo; por tanto, se hace lo que indica el paso 4.

4.-Aplique la regla seleccionada. Esto se hace sustituyendo los parámetros seleccionados en el miembro derecho de la regla.

$$\int (2x+3)^4\ 2dx = \frac{(2x+3)^5}{5} + c$$

b) $\int (5x+3)^{10}\, dx$

Aquí $u = 5x + 3 \Rightarrow du = 5dx$; por tanto, el diferencial de u no está completo debajo del signo integral ya que le falta el 5. En este caso hacemos el cambio de variable. Para eso despejamos a dx, en función de du, y se obtiene $dx = du/5$. Con todo esto,

$$\int (5x+3)^{10}\, dx = \tfrac{1}{5}\int u^{10} du = \tfrac{1}{5}\frac{u^{11}}{11} + c = \frac{u^{11}}{55} + c$$

Restituyendo la variable x, queda finalmente que:

$$\int (5x+3)^{10}\, dx = \frac{(5x+3)^{11}}{55} + c$$

Observación:

1.-En la práctica, cuando el diferencial no está completo, es más cómodo completarlo y aplicar la regla directamente que hacer el cambio de variable.

Ejemplos:

a) $\int \frac{dx}{(9x+2)^2}$. Según la regla 4) $\begin{cases} n = 2 \\ u = 9x + 2 \\ du = 9dx \end{cases}$. Falta el 9 en el numerador del integrando; por tanto, para completar el diferencial debemos multiplicar y dividir la integral por 9. Entonces,

$$\int \frac{dx}{(9x+2)^2} = \tfrac{1}{9}\int \frac{9dx}{(9x+2)^2} = \tfrac{1}{9}\left(-\frac{1}{(2-1)(9x+2)^{2-1}} \right) + c = -\frac{1}{9(9x+2)} + c = -\frac{1}{81x+18)} + c$$

b) $\int \sqrt{7x+5}\,dx$. Aquí $u = 7x+5,\ \ du = 7\,dx$. Falta el 7 junto con dx fuera de la raíz. Luego

$$\int \sqrt{7x+5}\,dx = \tfrac{1}{7}\int \sqrt{7x+5}\cdot 7\,dx = \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{(7x+5)^3}\right)+c = \tfrac{2}{21}\sqrt{(7x+5)^3}+c$$

c) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{5x+12}}$. Aquí $u = 5x+12,\ \ du = 5\,dx$ y n=3. Falta el 5 en el numerador; por tanto:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x+12}} = \frac{1}{5}\int \frac{5\,dx}{\sqrt[3]{5x+12}} = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{(5x+12)^2}\right)+c = \frac{3}{10}\sqrt[3]{(5x+12)^2}+c$$

d) $\int \dfrac{t\,dt}{t^2+5}$. En este caso $u = t^2+5$ y $du = 2t\,dt$. Falta el 2 en el diferencial; por tanto:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+5} = \tfrac{1}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+5} = \tfrac{1}{2}\ln|t^2+5|+c$$

e) $\int 5^{2x}\,dx$. Aquí $u = 2x,\ \ du = 2\,dx.$ Por tanto:

$$\int 5^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int 5^{2x}\,2dx = \tfrac{1}{2}\left(\frac{5^{2x}}{\ln 5}\right)+c = \frac{5^{2x}}{2\ln 5}+c = \frac{5^{2x}}{\ln 5^2}+c = \frac{5^{2x}}{\ln 25}+c$$

a) $\int e^{3x+1}\,dx$. Haciendo $u = 3x+1$ resulta que $du = 3dx$. Por tanto:

$$\int e^{3x+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\int e^{3x+1}\,3dx = \tfrac{1}{3}e^{3x+1}+c$$

Observación

2.-El método de sustitución se utiliza también para calcular la integral de algunas funciones irracionales convirtiéndolas en racionales.

Ejemplo:

a) $\int x\sqrt{x-5}\,dx$. Haciendo $u = \sqrt{x-5}$, se obtiene $x = u^2+5$ y de aquí resulta que $dx = 2u\,du$. Sustituyendo en la integral nos queda que

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \int (u^2+5)u\,2u\,du = \int (2u^4+10u^2)\,du = \frac{2u^5}{5}+\frac{10u^3}{3}+c$$

Restituyendo la variable original queda finalmente

$$\int x\sqrt{x-5}\,dx = \frac{2(\sqrt{x-5})^5}{5} + \frac{10(\sqrt{x-5})^3}{3} + c$$

5.5.-Integración por partes

Nótese que en las propiedades de integral indefinida no hay ninguna que permita calcular la integral de un producto. Ahora bien, si en producto se cumplen determinadas condiciones que exige el siguiente teorema entonces se puede resolver utilizando el método de integración por parte.

TEOREMA. Sean u y v dos funciones derivables con respecto a x. Entonces se cumple que

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

.

Observaciones

1.-Debe escogerse u de modo que du sea más simple que u. De ahí que, en integrales de la forma:

a) $\int p(x)\cdot a^x\,dx$, donde $p(x)$ es un polinomio, se toma $u = p(x)$.

b) $\int p(x)\cdot \log_a x\,dx$, donde $p(x)$ es un polinomio, se toma $u = \log_a x$.

2.-Debe escogerse dv de modo que se conozca v o la forma de calcularla de manera inmediata.

Ejemplos: Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \log_a x\,dx$. Haciendo $\begin{cases} u = \log_a x \\ dv = dx \end{cases}$, se obtiene que $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{x\ln a} \\ v = \int dx = x + c \end{cases}$.

Ahora bien, lo que hace falta de v es que su diferencial sea dx; por tanto, v puede ser cualquiera de las primitivas obtenidas. Es por eso que, por comodidad, se toma siempre la primitiva que se obtiene haciendo $c = 0$ en la integral indefinida. En este ejemplo, $v = x$; por tanto,

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\frac{dx}{x\ln a} = x\log_a x - \int \frac{dx}{\ln a} = x\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$$

.

b) $\int (x+1)\ln x\,dx$. Si tomamos $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (x+1)\,dx \end{cases}$, entonces $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = \int (x+1)\,dx = \dfrac{x^2}{2} + x \end{cases}$. Por tanto,

$$\int (x+1)\ln x\, dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2}+1\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4}+x\right)+c$$

.

c) $\int (x^2+5x+3)e^x\, dx$. En este caso hagamos $\begin{cases} u = x^2+5x+3 \Rightarrow du = (2x+5)\,dx \\ dv = e^x \Rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$.

$\int (x^2+5x+3)e^x\, dx = (x^2+5x+3)e^x - \int (2x+5)e^x\, dx$. Ahora $\begin{cases} u = 2x+5 \Rightarrow du = 2\,dx \\ dv = e^x \Rightarrow v = e^x \end{cases}$.

$$\int (x^2+5x+3)e^x\, dx = (x^2+5x+3)e^x - [(2x+5)e^x - \int 2e^x\, dx]$$

$$= (x^2+5x+3)e^x - (2x+5)e^x + \int 2e^x\, dx$$

$$= (x^2+5x+3)e^x - (2x+5)e^x + 2e^x + c = (x^2+3x)e^x + c$$

.

5.6.-Integración por descomposición en fracciones simples

El método de integración por descomposición en fracciones simples se utiliza para calcular la integral de funciones racionales fraccionarias, o sea, integrales que tienen la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

donde P y Q son polinomios en x.

Este método, como su nombre lo indica, consiste en descomponer el integrando en la suma de fracciones, más sencillas, cuyas integrales se puedan calcular de manera inmediata.

Para descomponer el integrando en fracciones simples, es necesario el mismo sea una fracción propia, o sea, que el grado del numerador sea menor que el grado del denominador. Cuando esta condición no se cumple, se efectúa el cociente indicado hasta que el resto tenga menor grado que el divisor. De esta forma el integrando se puede descomponer en la suma de un polinomio más una fracción propia.

Para descomponer una fracción propia en fracciones simples se procede como sigue:

1.-Se descompone el denominador en factores.

Aquí solo se estudiará el caso en que el denominador se descompone en factores lineales. Estos factores pueden repetirse.

2.-Se efectúa la descomposición en fracciones simples con coeficientes indeterminados.

3.-Se determina el valor de cada coeficiente.

4.-Se sustituye cada coeficiente por su valor.

Ejemplos: Calcule siguientes integrales:

a) $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx$

Descompongamos el integrando en fracciones simples.

$$\frac{x+2}{x^2-3x+2}=\frac{x+2}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

Igualando los numeradores se obtiene

$$A(x-2)+B(x-1)=x+2$$

Si en la igualdad anterior se le asignan valores a la x, se obtienen ecuaciones lineales cuyas variables son los coeficientes indeterminados. De este modo se puede formar un sistema de ecuaciones lineales que tenga la misma cantidad de ecuaciones que de incógnitas. La solución de ese sistema da el valor de cada coeficiente indeterminado.

Para mayor comodidad en los cálculos, es conveniente, primero, asignarle a la x aquellos valores que anulan al denominador. Si con estos no es suficiente para obtener la cantidad de ecuaciones requerida, entonces se le asignan otros valores.

Para $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$ se obtiene el sistema $\begin{cases} -A=3 \\ B=4 \end{cases}$, de donde resulta que $A=-3$ y $B=4$. Entonces $\frac{x+2}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2}$. Por tanto,

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}\,dx=\int\left(\frac{-3}{x-1}+\frac{4}{x-2}\right)dx=-3\int\frac{dx}{x-1}+4\int\frac{dx}{x-2}=-3\ln|x-1|+4\ln|x-2|+c$$

c) $\int \frac{x^2-3}{x^4+2x^3+x^2}\,dx$.

Descompongamos el integrando en fracciones simples.

$$\frac{x^2-3}{x^4+2x^3+x^2}=\frac{x^2-3}{x^2(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2}{x^2(x+1)^2}$$

Igualando los numeradores se obtiene que

$$Ax(x+1)^2 + B(x+1)^2 + Cx^2(x+1) + Dx^2 = x^2 - 3$$

En este caso hay cuatro coeficientes indeterminados: A, B, C, D y solamente dos valores que anulan al denominador: $x = 0,\ x = -1$, por tanto, para obtener las cuatro ecuaciones que hacen falta es necesario asignarle a la x dos valores más; por ejemplo: $x = 1,\ x = 2$.

Para $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$, se obtiene $\begin{cases} B = -3 & (1) \\ D = -2 & (2) \\ 4A + 4B + 2C + D = -2 & (3) \\ 18A + 9B + 12C + 4D = 1 & (4) \end{cases}$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) y (4) se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} 4A - 12 + \ 2C - 2 = -2 \\ 18A - 27 + 12C - 8 = \ 1 \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A + \ 2C = 12 \\ 18A + 12C = 36 \end{array}\right| : (-6)$$

$$\left.\begin{array}{r} 4A + 2C = 12 \\ -3A - 2C = -6 \end{array}\right|$$ Sumando miembro a miembro, se obtiene

$$A = 6$$

Sustituyendo A por 6 en la última ecuación obtenida resulta que

$$-18 - 2C = -6$$

$$C = -6$$

De acuerdo con los valores de los coeficientes, el integrando se descompone como sigue:

$$\frac{x^2 - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2}\, dx = \int \left(\frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = 6\int \frac{dx}{x} - 3\int \frac{dx}{x^2} - 6\int \frac{dx}{x+1} - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2}$$

$$= 6\ln|x| - 3\left(-\frac{1}{x}\right) - 6\ln|x+1| - 2\left(-\frac{1}{x+1}\right) + c = 6(\ln|x| - \ln|x+1|) + \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} + c$$

$$= 6\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{5x+3}{x^2+x} + c$$

5.7.-Aplicaciones económicas de la integral indefinida

Como hemos venido señalando en las clases anteriores, la integral indefinida es un conjunto infinito de funciones. Es por eso que se ha insistido mucho en que no se debe olvidar la constante arbitraria al calcular la integral indefinida; sin embargo, en la práctica se presentan muchos problemas en los que cuales es necesario obtener una primitiva específica que cumple una condición determinada.

Estos problemas se resuelven hallando el valor de c para él se cumple la condición. Para eso, dicha condición debe proporcionar la información necesaria para determinar un punto de la primitiva. Este punto se sustituye en la integral indefinida y se obtiene una ecuación lineal en c. La solución de dicha ecuación es el valor que debe tomar c para que se cumpla la condición.

Ejemplo:

a) Determine la función cuya derivada es $y' = 2x + 5$ y pasa por el punto (3; 4).

Respuesta:

$$y = \int y'\,dx = \int (2x+5)\,dx = x^2 + 5x + c$$

$$y = x^2 + 5x + c$$

Para $x = 3;\ y = 4$ se obtiene

$$4 = 9 + 15 + c$$

$$c = -20.$$

Por tanto, la función cuya derivada es $y' = 2x + 5$ y pasa por (3; 4) es $y = x^2 + 5x - 20$.

Por un procedimiento análogo al utilizado en el ejemplo anterior, se pueden determinar las funciones totales: costo, ingreso, utilidad, oferta, demanda, consumo, ahorro, producción, si se conoce la función marginal o tasa de variación correspondiente y una condición que permita obtener la constante arbitraria de la integral indefinida que resulta.

Ejemplos:

PROBLEMA 1. La función de ingreso marginal para un producto es $I' = 2000 - 20q - 3q^2$ donde q es la demanda semanal.

a) Halle la función de ingreso total.

b) ¿Cuál es el ingreso total cuando la demanda es de 10 unidades de producto?

Planteamiento:

q: unidades de productos demandas.

I: ingreso total (en $)

$I' = 2000 - 20q - 3q^2$ (ingreso marginal)

Para $q = 0,\ \ I = 0$ (condición)

$I(q) = ?$

Resolución:

a) $I = \int (2000 - 20q - 3q^2)\, dq = 2000q - 10q^2 - q^3 + c$

$I = 2000q - 10q^2 - q^3 + c$

Haciendo $q = 0$ e $I = 0$ se obtiene

$0 = 2000 \cdot 0 - 10 \cdot 0^2 - 0^3 + c$

$c = 0$.

La función de ingreso total es $I = 2000q - 10q^2 - q^3$.

b) $I(10) = 2000 \cdot 10 - 10 \cdot 10^2 - 10^3 = 20000 - 1000 - 1000 = 18000$

Cuando la demanda es de 10 unidades de producto, el ingreso total es de $18000

PROBLEMA 2. El costo marginal de fabricación de q libras de un producto semanalmente es $C' = 3 \cdot 10^{-9} q^2 - 2{,}5 \cdot 10^{-5} q + 0{,}2$, mientras que el costo fijo asciende a $4000.

a) Determine la función de costo total.

b) Calcule el costo de producción de 10000 libras de producto.

Planteamiento:

q: libras de producto fabricadas.

C: costo total (en $)

$C' = 3 \cdot 10^{-9} q^2 - 2{,}5 \cdot 10^{-5} q + 0{,}2$ (costo marginal)

$C = 4000$ cuando $q = 0$ (condición)

$C(t) = ?$

Resolución:

a) $C = \int (3 \cdot 10^{-9} q^2 - 2{,}5 \cdot 10^{-5} q + 0{,}2)\, dq = 3 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{q^3}{3} - 2{,}5 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{q^2}{2} + 0{,}2q + c$

$C = 10^{-9}\ q^3 - 1{,}25 \cdot 10^{-5}\ q^2 + 0{,}2q + c$

Haciendo $C = 4000$ y $q = 0$ se obtiene $c = 4000$.

Por tanto, la función de costo total es $C = 10^{-9}\ q^3 - 1{,}25 \cdot 10^{-5}\ q^2 + 0{,}2q + 4000$

b) $C(10000) = 10^{-9} \cdot 10000^3 - 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 10000^2 + 0{,}2 \cdot 10000 + 4000$

$= 10^{-9} \cdot 10^{12} - 1{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8 + 2000 + 4000 = 10^3 - 1{,}25 \cdot 10^3 + 6000$

$= 1000 - 1250 + 6000 = 5750$

El costo total de producción de 10000 libras de producto es $5750

PROBLEMA 3. El valor de una máquina al cabo de 3 años de explotación es de $35000. Si se sabe que el valor disminuye a razón de $5000 por año:

a) Determine la función que permite hallar el valor al cabo de t años de explotación.

b) Halle el valor inicial de la máquina.

Planteamiento:

t: años de explotación de la máquina

v: valor de la máquina al cabo de t años de explotación (en $).

$v' = -5000$ $/año (tasa de depreciación)

Para $t = 3,\ v = 35000$ (condición)

$v(t) = ?$

Resolución:

a) $v = \int -5000\, dt = -5000t + c$

$v = -5000t + c$

Para $t = 3$ y $v = 35000$ se obtiene

$35000 = -5000 \cdot 3 + c$

$c = 50000$

El valor de la máquina al cabo de t años de explotación es $v = -5000t + 50000$.

b) Para $t = 0$, $v = 50000$; por tanto, el valor inicial de la máquina es de $50000.

PROBLEMA 4. La tasa de variación del precio p de un producto con respecto a la demanda q es $p' = -2q$. Se sabe que, si el precio es de $100, los consumidores no están dispuesto a comprar.

a) Determine la función de precio.

b) ¿Cuál es precio cuando la demanda es de 7 unidades de producto?

Planteamiento:

q: unidades de producto demandas.

p: precio unitario (en $).

$p' = -2q$ (tasa de variación del precio)

$q = 0$, cuando $p = 100$ (condición)

$p(q) = ?$

Resolución:

a) $p = \int -2q\, dq = -2(q^2/2) + c = -q^2 + c$

$p = -q^2 + c$

Haciendo $p = 100$ y $q = 0$ resulta que $c = 100$; por tanto, la función de precio es $p = -q^2 + 100$.

b) $p(7) = -7^2 + 100 = 51$

Cuando la demanda es de 7 unidades de producto, el precio es de $51 por unidad.

Ejercicios

1.-Calcule las siguientes integrales inmediatas.

a) $\int 5\,dx$ b) $\int \frac{1}{2}\,dx$ c) $\int \sqrt{2}\,dx$

d) $\int (4x+5)\,dx$ e) $\int (x-3)\,dx$ f) $\int 0{,}01x\,dx$

g) $\int (r^3+2r)\,dr$ h) $\int (y^5-5y)\,dy$ i) $\int (7-3w-2w^2)\,dw$

j) $\int \frac{7}{x^4}\,dx$ k) $\int 5x^{-7}\,dx$ l) $\int \frac{x^2+2x}{x^{10}}\,dx$

m) $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx$ n) $\int (2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x})\,dx$ ñ) $\int (3x^4-\sqrt[4]{x})\,dx$

o) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ p) $\int \frac{dx}{5\sqrt{x}}$ q) $\int \frac{-3}{4\sqrt[8]{x}}\,dx$

r) $\int \frac{e^6+e^x}{2}\,dx$ s) $\int \frac{-5e^x}{3}\,dx$ t) $\int \frac{e^{2x}+3xe^x}{e^x}\,dx$

u) $\int 2\cdot 0{,}5^x\,dx$ v) $\int \frac{6^x+9^x-12^x}{3^x}\,dx$ w) $\int 5^x e^x\,dx$

2.-Calcule las siguientes integrales haciendo el completamiento del diferencial.

a) $\int (5x+3)^6 dx$ b) $\int (x^2+1)^5 x\,dx$ c) $\int (e^{2x}-4)^2 e^{2x}\,dx$

d) $\int \frac{dx}{2x+5}$ e) $\int \frac{x\,dx}{x^2+8}$ f) $\int \frac{e^x\,dx}{3e^x+6}$

g) $\int \frac{dx}{(4x+7)^2}$ h) $\int \frac{3dx}{(2x-3)^3}$ i) $\int \frac{dx}{e^{5x}}$

j) $\int \sqrt{3x-5}\,dx$ k) $\int e^x\sqrt{2-e^x}\,dx$ l) $\int \sqrt[3]{(x^2+10)}\,x\,dx$

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x-7}}$ n) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ ñ) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{9-2x}}$

o) $\int e^{2x}\,dx$ p) $\int 3e^{2x+1}\,dx$ q) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

r) $\int 2^{-x}\,dx$ s) $\int 3^{2x+1}\,dx$ t) $\int \frac{5^{\ln x}}{x}\,dx$

3.-Calcule las siguientes integrales efectuando el cambio de variables indicado en cada caso.

a) $\int x(2x+5)^{10}\,dx;\ \ t=2x+5$ b) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx;\ \ t=x-2$ c) $\int \frac{dx}{e^x+1};\ \ x=-\ln t$

d) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}};\ \ v=\sqrt{x+1}$ e) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x-5}};\ \ v=\sqrt{x-5}$ f) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}};\ \ v=\sqrt{x-1}$

g) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx;\ \ u=\sqrt{x}$ h) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};\ \ u=\sqrt{x+1}$ i) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}};\ \ u=\sqrt{x}$

j) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};\ \ q=\sqrt[3]{x+1}$ k) $\int x\sqrt{x-1}\,dx;\ \ q=\sqrt{x-1}$ l) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}};\ \ q=\sqrt[6]{x}$

4.-Calcule las siguientes integrales aplicando el método de integración por partes.

a) $\int \ln(x+1)\,dx$ b) $\int \log(2x+3)\,dx$ c) $\int \log_2(3x-4)\,dx$

d) $\int (2x+3)\ln x\,dx$ e) $\int x\cdot\log x\,dx$ f) $\int (x+2)\log_3 x\,dx$

g) $\int (x+5)e^x\,dx$ h) $\int (7x-5)8^x\,dx$ i) $\int x\cdot 10^x\,dx$

j) $\int x^2e^x\,dx$ k) $\int (x^2+x)e^x\,dx$ l) $\int x^2\,5^x\,dx$

5.-Calcule las siguientes integrales descomponiendo el integrando en fracciones simples.

a) $\int \frac{-3x+4}{x^2-5x+6}\,dx$ b) $\int \frac{dx}{x^3+5x^2+6x}$ c) $\int \frac{6x^2-12}{x^4-5x^2+4}\,dx$

d) $\int \frac{5x^2-5x+10}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ e) $\int \frac{8x\,dx}{x^4-8x^2+16}$ f) $\int \frac{x^3-2x^2+7x-1}{x^4+x^3-9x^2+11x-4}\,dx$

g) $\int \frac{2x^3-50x+1}{x^2-25}\,dx$ h) $\int \frac{x^3+10x^2+21x-1}{x^2+10x+21}\,dx$ i) $\int \frac{x^4+4x^3-22x^2+16x+21}{x^3+4x^2-21x}\,dx$

6.-Calcule las siguientes integrales por el método más cómodo.

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ c) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x+9}}$ d) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x(x-4)}$ e) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-2}$

f) $\int \ln(x^2-3x+2)\,dx$ g) $\int \ln(x^3+6x^2+11x+6)\,dx$ h) $\int \ln(x^3-4x)\,dx$

8.-Determine la función $y=f(x)$ que cumple las condiciones siguientes:

a) $y'=2x+3;$ pasa por el punto (1; 2).

b) $y'=3x-4;\ \ y(-1)=\frac{13}{2}$.

c) $y'=3x^2+2;\ \ f(2)=-1$.

d) $y'=x^2-x$; para $x=3,\ \ y=4$.

e) $y''=-x^2-2x;\ \ y'(1)=0;\ \ y(1)=1$.

f) $y''=x+1;\ \ y'(0)=0;\ \ y(0)=5.$

g) $y'''=2x;\ \ y''(-1)=3;\ y'(3)=10;\ y(0)=2$.

h) $y'''=e^x+1;\ \ y''(0)=1;\ y'(0)=2;\ y(0)=3$.

9.-El ingreso marginal por la venta de q unidades de un producto es $I_m=275-q-0{,}3q^2$.

a) Determine la función de ingreso total.

b) Calcule el ingreso total para $q=50$.

10.- El ingreso marginal por la venta de q unidades de un producto es $I_m=10000-4q-2q^2$.

a) Determine la función de ingreso total.

b) Calcule el ingreso total para $q=10$.

c) Determine la ecuación de demanda.

11.-El ingreso marginal por concepto de venta de q unidades de un producto viene dado por $I_m = 2000 - 20q - 3q^2$. Halle el precio cuando la demanda sea de 10 unidades de producto.

12.-El costo marginal de producción de q unidades de producto es $c_m = 0{,}09q^2 - 1{,}2q + 4{,}5$. El costo fijo es de $7700. Halle el costo total cuando el nivel de producción es de 10 unidades de producto.

13.-Si la función de costo marginal es $c_m = 0{,}000102q^2 - 0{,}034q + 5$, donde q es el nivel de producción, y el costo fijo es de $10000, calcule el costo total de producción de 100 unidades.

14.-Un fabricante ha decidido que la función de costo marginal de producir q unidades de un producto es $c_m = 0{,}003q^2 - 0{,}4q + 40$. Si los costos fijos ascienden a $5000, ¿cuál es costo promedio cuando el nivel de producción es de 100 unidades de producto?

15.-Un equipo de trabajadores sociales ha llegado a la conclusión de que después de t años de aplicado un programa para ayudar a la educación de los niños en edad preescolar, la matrícula varía a una razón $y' = \frac{10}{9}(12 - 2t)$ millares de niño por año. Si a los 3 años de implantado el programa la matrícula es de 30 millares de niños, ¿cuál será la matrícula al cabo de los 9 años?

16.-La ganancia marginal por concepto de fabricación y venta de x toneladas de un producto viene dada por $G_m = 20x - x^2$. La fabricación de 15 toneladas de dicho producto deja una ganancia de $1130. Determine la ganancia máxima.

17.-La utilidad marginal de un fabricante viene dada por $U = 480 - 2x$, donde x es el nivel de producción. Si la elaboración de 10 unidades de productos deja una utilidad de $4700, determine la utilidad óptima.

BIBLIOGRAFÍA

ALLEN, C. B. (1967). Economía Matemática. Edición Revolucionaria. La Habana. BALDOR, Doris y otros. (1978). Análisis Matemático I. Empresa de Producción y Servicios del MES. La Habana.

BUDNICK, F. S. (1990). Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Tercera Edición. Editorial McGraw-Hill. México.

GONZÁLEZ, M. O. y J. D. Mancill. (1967). Álgebra Elemental Moderna. Volumen I. Quinta Edición. Editora Pedagógica. La Habana.

HAEUSSLER, E. F. (1989). Matemáticas para Administración y Economía. Quinta Edición. Grupo Editorial Ibero América. México.

MARTÍNEZ, E. et al. (1990). Matemática Superior. Tomo I. Universidad de La Habana. La Habana.

FRISCH, R. (1969). Las Leyes Técnicas y Económicas de la Producción. Edición Revolucionaria. La Habana.

RODRÍGUEZ, R. et al. (1991). Cálculo Diferencial e Integral. Primera Parte. Editorial Pueblo y Educación. La Habana.

RICARDO, P. (2002). Cálculo Diferencial e Integral. Universidad de Granma.

SAMUELSON, P. (2002). Economía. Decimoséptima Edición. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

SYDSAETER, K. & Hammond, J. (2003.). Matemáticas para el Análisis Económico. Volumen I. Editorial Félix Varela. La Habana.

SWOKOWSKI, E. W. (2003). Cálculo con Geometría Analítica. Tomo I. Segunda Edición. Editorial Félix Varela. La Habana.

WEBER, J. E. (2002). Matemáticas para Administración y Economía. Cuarta Edición. Editorial Oxford University Press. México.

YAMANE, T. (1967). Matemáticas para Economistas. Edición Revolucionaria. La Habana.

Ciencias y Letras